

Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

8.1. MC Fragen.

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetigen Funktionen. Wählen Sie die richtige Aussagen.

- ☐ Falls f_n nach f gleichmässig konvergiert, konvergiert f_n nach f punktweise.
- ☐ Falls $|f_n(x)| < c_n$ für $c_n \in \mathbb{R}$ und jedes $x \in D$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ punktweise.
- ☐ Falls $|f_n(x)| < c_n$ für jedes $x \in D$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ punktweise.

(b) Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x^{1/2} + n^{-1})^2.$$

Welche der Aussagen gilt?

- ☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- ☐ Die Funktionenfolge konvergiert gleichmässig.
- ☐ Für alle $M > 0$ gilt, dass die Funktionenfolge $f_n|_{[0,M]}: [0,M] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- ☐ $\exp: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt, wobei $a, b \in \mathbb{R}$
- ☐ $(\exp \circ \ln)\left(\frac{a}{b}\right) = a - b$
- ☐ $(\exp \circ \ln)(a + b) = a + b$

(d) Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☐ Für $f(x) := \sin(x) \cdot \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, gilt: $f(-x) = -f(x)$.
- ☐ Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (f(x))^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

stetig.

- ☐ Die Funktion $\cos \circ \sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist monoton.

- ☐ Die Funktion $\exp \circ \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv.
- ☐ Die Funktion $\cos \circ \exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt und stetig.

8.2. Analysiere folgende Funktionen auf strikte Monotonie, und falls möglich, bestimme die Inverse Funktion.

- (a) $f(x) = \ln(x - 3) - 5$ für $x \in (3, +\infty)$
- (b) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$
- (c) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$

8.3. Gleichmässige Konvergenz von Potenzreihen I. Sei $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$ eine Potenzreihe, die gleichmässig in $\mathbb{R}$ konvergiert. Beweisen Sie, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $c_n = 0$ für alle $n \geq N$ ist.

***8.4. Konvergenz von Funktionenfolgen.** Konvergieren die folgenden Funktionenfolgen auf dem Intervall $[0, 1]$ punktweise gegen eine Grenzfunktion f ? Falls ja, bestimmen Sie f und untersuche, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

- (a) $f_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N};$
- (b) $f_n(x) := \frac{\sin x}{n};$
- (c) $f_n(x) := 1 + x^n(1 - x)^n, \quad n \in \mathbb{N};$

***8.5. Gleichmässigkonvergenz.** $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und f_n konvergiere gleichmässig gegen f auf D . Dann zeigen Sie, dass $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt ist.

8.6. Trigonometrische Funktion.

- (a) Zeige, dass $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \left(\frac{x - y}{2} \right) \cos \left(\frac{x + y}{2} \right) \quad (1)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \left(\frac{x - y}{2} \right) \sin \left(\frac{x + y}{2} \right) \quad (2)$$

(b) Zeige dass $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ eine strong monoton stetige bijektive Abbildung ist.

(c) Zeige für alle $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq x \leq \sqrt{(4k+5)(4k+6)}$ gilt:

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots - \frac{x^{2(2k+1)}}{[2(2k+1)]!}$$