Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

9.1. MC Fragen

(a) Seien (a_n) und (b_n) zwei reellen Folgen. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ Die Folge (b_n) ist konvergent, falls $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und (a_n) konvergent ist.
- ☐ Beiden Folgen (a_n) und (b_n) sind konvergent, falls $|a_n - b_n| < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- ☐ Die Folge (b_n) ist konvergent, falls (b_n^2) konvergent ist.
- ☐ Die Folge (b_n) konvergiert gegen 0, falls $0 \leq b_n \leq a_n^3$ und (a_n) konvergent gegen 0 ist.

(b) Sei (a_n) eine reelle Folge so, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ Die Folge (a_n) ist konvergent, falls (a_n) monotone ist.
- ☐ $\liminf a_n < \limsup a_n$, falls (a_n) beschränkt ist.
- ☐ Die Folge (a_n) ist konvergent, falls (a_n) streng monoton wachsend ist.
- ☐ $\liminf a_n \geq 0$, falls (a_n) beschränkt ist.

(c) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$.

- ☐ Es ist möglich dass $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -2$
- ☐ Es ist möglich dass $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$
- ☐ Es ist möglich dass $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(d) Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 0$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/(2n)} = \infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} (n^{1/(2n)} + n^{2/n}) = 1.$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1/(3n)} \left(1 - n^{2/(3n)}\right) = 0$

9.2. Grenzwerten Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim_{n\to+\infty} e^{(n^3+2)/(n^3-6)}$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/n}}{e^{n^2/(n^2+1)}+3}$

(c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n!}{(n!)^2+1}$.

9.3. Wurzelkriterium Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und ganze Zahl $n \geq 1$ existiert eine einzige Zahl y, sodass $y^n = x$ ist. Wir bezeichnen $y = \sqrt[n]{x}$.

Sei (x_n) eine komplexe Folge, sodass die Folge $\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right)$ gegen $\ell \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ absolut konvergent ist, falls $\ell < 1$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergent ist, falls $\ell > 1$ ist.

***9.4. Konvergenz oder Divergenz**
Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren. Berechnen Sie den Grenzwert, falls die Reihe konvergiert.

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$$ b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2^n)}{e^n}$$

9.5. Konvergenz
Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^5+n^3-1}}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-5}$$

***9.6. Konvergenzradius von Potenzreihen** Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k z^k.$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} z^k.$

9.7. Reihen und Potenzreihen

a) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$.

b) Konvergiert die folgende Reihe? Konvergiert sie absolut?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Nennen Sie die Konvergenzsätze mit Namen, die Sie verwenden.

c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$x + 4x^4 + 9x^9 + 16x^{16} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n^2}.$$

Falls Sie dabei ein Resultat über Konvergenzradien aus der Vorlesung benutzen, so schreiben Sie die vollständige Aussage dieses Resultats auf.