

Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

10.1. MC Fragen.

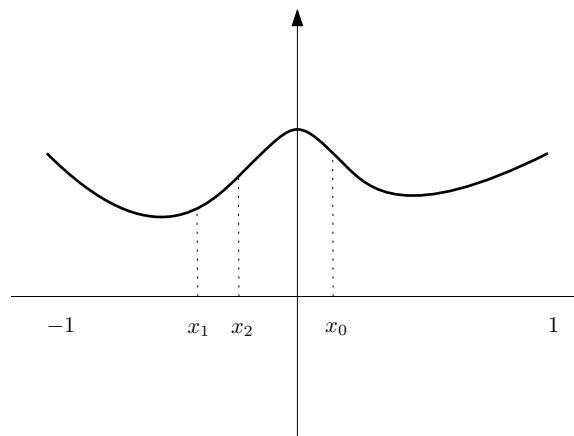
(a) Definiere für $x > 0$

$$f(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\min\{x, x^{-1}\} \right)^k.$$

Dann

- ☐ f ist stetig und differenzierbar
- ☐ f ist differenzierbar, aber nicht stetig
- ☐ f ist stetig, aber nicht differenzierbar
- ☐ f ist nicht stetig und nicht differenzierbar

(b) Sei $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgendem Graph



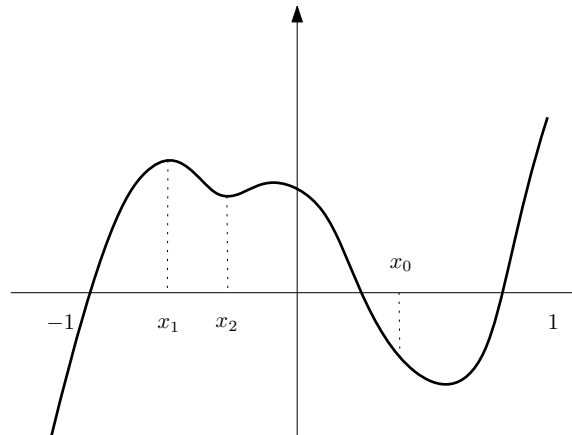
Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ☐ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.
- ☐ $f'(x_0) > 0$.
- ☐ $f'(x_1) = 0$.
- ☐ $f'(x_2) < 0$.

(c) Sei $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgendem Graph

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ☐ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.



☐ $f'(x_0) > 0$.

☐ $f'(x_1) = 0$.

☐ $f'(x_2) < 0$.

(d) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(t) > 0$ für alle $t \in (a, b)$. Kreuze die richtigen Aussagen an.

☐ f ist positiv.

☐ $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in (a, b)$ mit $x > y$.

☐ $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in (a, b)$ mit $x \geq y$.

☐ $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in (a, b)$ mit $x < y$.

(e) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $D \subset \mathbb{R}$. Kreuze die richtigen Aussagen an.

☐ f ist stetig.

☐ f' ist stetig.

☐ Falls $f'(x) = 0$ für alle $x \in D$ gilt, dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = c, \quad \forall x \in D.$$

☐ Falls $D = (a, b)$ mit $a < b$ reelle Zahlen, dann ist die dritte Aussage korrekt.

*10.2. Ableitung II.

- (a) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Berechne

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-2)h)}{h}.$$

- (b) Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *gerade* (resp. *ungerade*), falls $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zeige: falls f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dass gilt:

(i) f gerade $\implies f'$ ungerade.

(ii) f ungerade $\implies f'$ gerade.

***10.3. Hyperbelfunktionen** Seien $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$ und $g(x) = (e^x - e^{-x})/2$ zwei Funktionen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert sind.

- (a) Zeigen Sie, dass f und g differenzierbar in $\mathbb{R}$ sind, und dass Folgendes gilt:

$$f' = g, \quad g' = f.$$

- (b) Zeigen Sie, dass $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- (c) Zeigen Sie, dass g strikt monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.

- (d) Zeigen Sie, dass Folgendes gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty.$$

- (e) Folgern, dass g eine Bijektion ist, und dass g^{-1} differenzierbar mit Ableitung

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist.

- (f) Zeigen Sie, dass $g(x) > 0$ wenn $x > 0$ und $g(x) < 0$ wenn $x < 0$ ist.

- (g) Zeigen Sie, dass f strikt monoton fallend auf $] -\infty, 0]$ und strikt monoton wachsend auf $[0, +\infty[$ ist.

- (h) Sei f_1 die Einschränkung der Funktion f auf $[0, +\infty[$. Zeigen Sie, dass f_1 eine Bijektion von $[0, +\infty[$ nach $[1, +\infty[$ ist.

(i) Zeigen Sie, dass f_1^{-1} differenzierbar auf $]1, +\infty[$ ist, und dass

$$(f_1^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

für alle $x > 0$.

10.4.

(a) Sei

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass f in 0 nicht differenzierbar ist.

(b) Sei

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass f bei 0 differenzierbar ist und berechne $f'(0)$.