Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

11.1. MC Fragen.

(a) Welche der folgenden Implikationsketten für eine Funktion f sind richtig?

- ☐ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig.
- ☐ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar.
- ☐ $f'' > 0 \Longrightarrow f$ ist konvex.
- ☐ $f'' > 0 \Longrightarrow f$ ist konkav.

(b) Wählen Sie die richtige Aussagen.

- ☐ Falls f_n stetige Funktionen sind und falls f_n nach f gleichmässig konvergiert, dann ist f auch stetig.
- ☐ Falls f_n differenzierbare Funktionen sind und falls f_n nach f gleichmässig konvergiert, dann ist f auch differenzierbar.
- ☐ Falls f_n eine Funktionenfolge ist, wobei f_n einmal stetig differenzierbar ist für jede $n \in \mathbb{N}$ und falls sowohl (f_n) als auch (f_n') gleichmässig konvergieren mit $f_n \to f$ und $f_n' \to g$, dann ist auch f stetig differenzierbar mit $f' = g$.

(c) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass

$$f(1/2) = 2, \quad f'(1/2) = 0, \quad f''(1/2) = -1.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ☐ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in $1/2$.
- ☐ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in $1/2$.
- ☐ Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in $1/2$.
- ☐ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

(d) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ☐ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.
- ☐ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in 0.

- ☐ Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in 0.
- ☐ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

(e) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ☐ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.
- ☐ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in 0.
- ☐ Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in 0.
- ☐ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

11.2. n-te Ableitung. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die n-te Ableitung für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) $f(x) = x^6 + x^5 - x^2 + 6x - 8.$

(b) $g(x) = \ln x,\ x > 0.$

(c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 6} = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3}.$

(d) $f(x) = (\sin x)^2 = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos 2x\Big).$

11.3. a) Bestimme die lokalen Maxima und Minima von $f(x) = (\sin x)^3 + (\cos x)^3$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) Bestimme die lokalen Maxima und Minima von

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt[3]{3x^3 - x^2}.$$

11.4. Taylorpolynom. Sei

$$f(x) = \ln\Big(1 + (1+x)^2\Big), \qquad x_0 = -1.$$

Bestimmen Sie:

(a) das Taylorpolynom 2. Ordnung $T_2 f(x; -1)$ und das Taylorpolynom 3. Ordnung $T_3 f(x; -1)$,

(b) mithilfe von T_2 eine Approximation von

$$f(x_0 + 0.01) = f(-0.99).$$