Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

1.1. MC Fragen: Supremum und Infimum auf $\mathbb{R}$. Wählen Sie die einzig richtige Antwort.

(a) Sei $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$. Dann gilt

- ☐ $\max(A) = 1$, $\min(A) = 0$.
- ☑ $\max(A) = 1$, $\inf(A) = 0$.
- ☐ A hat kein Maximum, $\inf(A) = 0$.
- ☐ $\sup(A) = 1$, $\min(A) = 0$.

(b) Wenn $A \subset \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt, dann besitzt $A \cap \mathbb{Q}$ auch ein Maximum.

- ☐ Richtig
- ☑ Falsch

Gegenbeispiel: Sei $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \pi\}$. Dann besitzt A namelyein Maximum, nämlich π, in $\mathbb{R}$. Die Teilmenge $A \cap \mathbb{Q}$ (die rationalen Zahlen in A) hingegen hat kein Maximum. Der Grund dafür ist, dass es für jede rationale Zahl $q < \pi$, eine weitere rationale Zahl r gibt, sodass $q < r < \pi$. Somit existiert keine größte rationale Zahl in $A \cap \mathbb{Q}$.

(c) $\min\{\frac{k}{k+2} \mid k \in \mathbb{N}\} = 0$. Hier ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

- ☑ Ja
- ☐ Nein

(d) Sei S eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$ ihr Supremum. Dann gilt:

- ☐ für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine obere Schranke b von S, so dass $a - \varepsilon < b < a$;

  Falsch: a ist die kleineste der oberen Schranken: für jede obere Schranke b muss $a \leq b$ gilt.

- ☐ $S \setminus \{a\}$ besitzt ein Maximum;

  Falsch: z.B. sei $S = (0, 1)$, $a = 1$. Dann besitzt $S \setminus a = S$ kein Maximum.

- ☑ a ist das Infimum der oberen Schranken.

***1.2. Axiome der reellen Zahlen.** Zeigen Sie, dass für alle $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, wobei $x \leq y$ und $u \leq v$, folgendes gilt:

$$x + u \leq y + v.$$

Lösung. Sei $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, wobei $x \leq y$ und $u \leq v$. Mit dem Axiom K1 (siehe Skript, Seite 4) folgt aus $x \leq y$, dass

$$x + u \leq y + u. \tag{1}$$

Wenn wir K1 nochmals anwenden, erhalten wir aus $u \leq v$, dass

$$y + u \leq y + v. \tag{2}$$

Wenn wir Axiom O2 auf die Gleichungen (1) und (2) anwenden, erhalten wir

$$x + u \leq y + v.$$

1.3. Supremum und Infimum I. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a > 0$ und S eine nichtleere, von oben beschränkte Menge. Beweisen Sie, dass folgendes gilt:

$$\sup_{x \in S}(ax + b) = a \sup_{x \in S} x + b. \tag{3}$$

Lösung. Sowohl $\sup_{x \in S}(ax + b)$ als auch $\sup_{x \in S} x$ existieren. Wir zeigen, dass

$$\sup_{x \in S}(ax + b) \leq a \sup_{x \in S} x + b \qquad \text{und} \qquad \sup_{x \in S}(ax + b) \geq a \sup_{x \in S} x + b. \tag{4}$$

Aus Axiom O3 folgt dann die Gleichung (3).

Sei $M \coloneqq \sup_{x \in S} x$. Da S von oben durch M beschränkt ist, haben wir für alle $x \in S$

$$x \leq M \implies ax \leq aM \implies ax + b \leq aM + b.$$

Das heisst, $aM + b$ ist eine obere Schranke von $ax + b$. Aus der Definition vom Supremum folgt, dass es die kleineste obere Schranke ist. Daraus folgt

$$\sup_{x \in S}(ax + b) \leq a \sup_{x \in S} x + b.$$

Sei $P \coloneqq \sup_{x \in S}(ax + b)$. Wir zeigen jetzt, dass $P \geq aM + b$ (die zweite Ungleichung aus (4)), was equivalent zu $\frac{1}{a}(P - b) \geq M$ ist.

Aufgrund der Definition vom Supremum genügt es zu beweisen, dass $\frac{1}{a}(P-b)$ eine obere Schranke von S ist. Sei $x \in S$. Dann gilt:

$$ax + b \leq P \implies ax \leq P - b \implies x \leq \frac{1}{a}(P-b).$$

Dass heisst, $\frac{1}{a}(P-b)$ ist eine obere Schranke von S. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

***1.4. Supremum und Infimum II.** Bestimmen Sie, falls vorhanden, das Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der folgenden Teilmengen der reellen Zahlen:

$$A_1 = \left\{x^2 - 5x + 6 \mid x \in \mathbb{R}\right\},$$
$$A_2 = \left\{\frac{1}{2+k} + \frac{1}{3+m} \,\middle|\, k, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Lösung. Die Menge A_1 ist das Bild des Polynoms $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Nämlich, $A_1 = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$. Wir sehen jetzt, dass $\inf A = \min A = -\frac{1}{4}$ und $\sup A = +\infty$ und das Maximum existiert nicht.

Wir beweisen, dass 0 das Infimum von A_2 ist und dass A_2 kein Minimum hat. Da für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2+k} + \frac{1}{3+m} \geq 0$$

gilt, ist 0 eine untere Schranke von A_2. Angenommen, es gäbe eine grössere untere Schranke $\varepsilon > 0$. Wähle $k, m \in \mathbb{N}$ so dass $k, m > \frac{2}{\varepsilon}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2+k} + \frac{1}{3+m} < \frac{1}{2+\frac{2}{\varepsilon}} + \frac{1}{3+\frac{2}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{2\varepsilon+2} + \frac{\varepsilon}{3\varepsilon+2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also gibt es keine grössere untere Schranke. Ebenfalls ist 0 kein Minimum, weil

$$\frac{1}{2+k} + \frac{1}{3+m} = 0$$

impliziert, dass $2 + k = -3 - m$, das heisst, $k + m = -1$. Diese Gleichung hat keine Lösung, weil $k, m \in \mathbb{N}$.

Das Maximum und das Supremum von A_2 sind $\max A_2 = \sup A_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

1.5. Komplexe Zahlen – Wiederholung. Finden Sie für jede der folgenden komplexen Zahlen z

- ihre kartesische Form $A + iB$,
- ihren Betrag $|z|$,
- ihr Konjugiertes $\bar{z}$,
- ihr Reziprokes $1/z$ (in kartesischer Form):

$$z_1 = -42, \qquad z_2 = -\frac{1}{i}, \qquad z_3 = \frac{1-i}{1+i},$$
$$z_4 = \cos\alpha + i\sin\alpha, \qquad z_5 = \sin\alpha + i\cos\alpha,$$
$$z_6 = 2022 + i^{2021}, \qquad z_7 = (1+i)^6,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Vielleicht möchten Sie z_6 zuerst in trigonometrischer Form schreiben.

Bemerkung: Die kartesische Form darf nicht i in dem Nenner erhalten! Z.B. $1 + i$ ist OK, $1/(1 + i)$ nicht.

Lösung.

- Wir betrachten $z_1 = -42$.
  - kartesische Form: -42;
  - Betrag: 42;
  - Konjugierte: -42;
  - Reziproke: $-\frac{1}{42}$.
- Wir betrachten $z_2 = -\frac{1}{i}$.
  - kartesische Form: $-\frac{1}{i} = -\frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = i$;
  - Betrag: 1;
  - Konjugierte: $-i$;
  - Reziproke: $-i$.
- Wir betrachten $z_3 = \frac{1-i}{1+i}$.
  - kartesische Form:

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-2i-1}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i;$$

  - Betrag: 1;
  - Konjugierte: i;
  - Reziproke: $-\frac{1}{i} = i$.

- Wir betrachten $z_4 = \cos\alpha + i\sin\alpha$.
  - kartesische Form: $\cos\alpha + i\sin\alpha$;
  - Betrag: $\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$;
  - Konjugierte: $\cos\alpha - i\sin\alpha$;
  - Reziproke:

$$\frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha.$$

- Wir betrachten $z_5 = \sin\alpha + i\cos\alpha$.
  - kartesische Form: $\sin\alpha + i\cos\alpha$;
  - Betrag: $\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 1$;
  - Konjugierte: $\sin\alpha - i\cos\alpha$;
  - Reziproke:

$$\frac{1}{\sin\alpha + i\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha - i\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \sin\alpha - i\cos\alpha.$$

- Wir betrachten $z_6 = 2022 + i^{2021}$.
  - kartesische Form: Wir benutzen, dass $i^4 = 1$. Dann gilt:

$$2022 + i^{2021} = 2022 + (i^4)^{505} \cdot i = 2022 + i;$$

  - Betrag: $|2022 + i| = \sqrt{2022^2 + 1^2} = \sqrt{4\,088\,485}$;
  - Konjugierte: $2022 - i$;
  - Reziproke:

$$\frac{1}{2022 + i} = \frac{2022 - i}{2022^2 + 1} = \frac{2022}{2022^2 + 1} - \frac{i}{2022^2 + 1}.$$

- Wir betrachten $z_7 = (1 + i)^6$.

- kartesische Form: Wir benutzen, dass $1+i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ für $r = \sqrt{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(1+i)^6 = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^6 &= r^6\left(\cos(6\varphi) + i\sin(6\varphi)\right)\\ &= 8\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = -8i;\end{aligned}$$

- Betrag: 8;
- Konjugierte: $8i$;
- Reziproke: $-\frac{1}{8i} = \frac{1}{8}i$.