Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

2.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz. Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Welche der Aussagen ist richtig?

☑ Eine Folge kann höchstens ein Grenzwert haben.

☐ Jede monotone und von oben beschränkte Folge ist konvergent.

Falsch: Die Folge $a_n = -n$ ist monoton und von oben beschränkt, aber sie konvergiert nicht.

☐ Es gibt konvergente Folgen, die nicht beschränkt sind.

Falsch: Siehe Bemerkung 2.5 im Skript.

☐ Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

Falsch: Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist divergent und beschränkt.

(b) Seien (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $c_n = a_n + b_n$.

☐ Falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$, und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Falsch: Sei $a_n = -(-1)^n$ und $b_n = (-1)^n$. Dann gilt $c_n = 0$ für alle $n \in \{1, 2, \dots\}$ und somit $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren nicht.

☑ Falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ existieren, existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Richtig: Siehe Satz 2.8 im Skript.

☑ Falls (a_n) und (b_n) beschränkt sind, muss (c_n) beschränkt sein.

Richtig: Sei $A \in \mathbb{R}^+$ eine Schranke von (a_n) und sei B eine Schranke von (b_n). Dann gilt:

$$|c_n| = |a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| \le A + B.$$

Das heisst, $A + B$ ist eine Schranke von c_n.

- ☐ Falls (c_n) konvergiert, konvergiert mindestens eine der Folgen (a_n) und (b_n).

  Falsch: Die Folgen $a_n = -(-1)^n$ und $b_n = (-1)^n$ sind wieder ein Gegenbeispiel.

(c) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

- ☐ Falls $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

  $$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq 1$$

  gilt, dann konvergiert (a_n).

  Falsch: Sei $a = 0$, $a_n = (-1)^n$ und $\varepsilon = 2$.

- ☑ Falls (a_n) konvergiert, ist die Folge $b_n = a_{n+1} + a_n$ konvergent.

  Richtig: Sei $\varepsilon > 0$ und sei $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N$. Dann gilt:

  $$|b_n - 2a| = |a_{n+1} + a_n - 2a| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- ☐ Falls die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ nach 0 konvergiert, ist (a_n) konvergent.

  Falsch: Sei $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Dann ist $b_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}$ und wir wissen, dass das konvergiert. Anderseits konvergiert die Summe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ nicht.

- ☑ Falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq a \ \forall n \geq 1$, und $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \geq 1$, dann ist (a_n) konvergent.

  Richtig: Siehe Satz 2.11 (Weierstrass) im Skript.

2.2. Folgenkonvergenz Sei (a_n) eine konvergente reelle Folge. Zeigen Sie, dass (a_n) beschränkt ist. Das heißt, eine reelle Zahl $C \in \mathbb{R}$ existiert so, dass $|a_n| < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung. Eine Folge (a_n) heißt konvergent, falls es $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\},$$

endlich ist. Insbesondere, ist die Menge

$$E := \{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - 1, l + 1[\},$$

endlich, und es gibt ein Maximum $C_1 = \max\{|a_n| : n \in E\}$. Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus E$, es gilt

$$|a_n| = |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| \leq 1 + |l|.$$

Dann es gilt

$$|a_n| < C = \max\{1 + |l|, C_1\} + 1,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

***2.3. Grenzwert I** Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Beweisen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Hinweis: Der Binomialsatz könnte nützlich sein.

Lösung. Falls $a > 1$, sei $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Dann $b_n > 0$ und nach Binomische Satz gilt:

$$1 + nb_n \leq (1 + b_n)^n = a,$$

Es gilt also:

$$0 \leq b_n \leq \frac{a-1}{n}$$

und deshalb haben wir $b_n \to 0$. Das heisst dass $\sqrt[n]{a} \to 1$

Falls $a = 1$, haben wir $\sqrt[n]{a} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und das Ergebnis folgt sofort.

Falls $0 < a < 1$, definieren wir $c = \frac{1}{a}$. Dann $c > 1$ und es gilt nach dem vorherigen Teil: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

Dann

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}}.$$

Dies impliziert, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2.4. Grenzwert II Man untersuche die nachstehenden Zahlenfolgen. Sind sie beschraňkt? Konvergieren sie? Wenn ja: Welches ist ihr Grenzwert?

***(a)** $a_n = \dfrac{3n^5 + 2n^3 + 5n}{10 + 2n^5}$;

Lösung.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^5 + 2n^3 + 5n}{10 + 2n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + 2n^{-2} + 5n^{-4}}{10n^{-5} + 2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3+0+0}{0+2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(b) $b_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$;

Lösung.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+3n) - n^2}{\sqrt{n^2+3n} + n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n\sqrt{1+3/n} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+3/n} + 1} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{n}} = 1.$$

Hinzufügen: Gemäß der Definition des Grenzwerts müssen wir zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine positive ganze Zahl N existiert, sodass für alle $n > N$ gilt:

$$\left|\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1\right| < \varepsilon.$$

Schritt 1: Umformung des Betrags

$$\left|\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1\right| = \left|\frac{(1+3/n) - 1}{\sqrt{1+3/n} + 1}\right|$$

$$= \frac{3/n}{\sqrt{1+3/n} + 1}.$$

Schritt 2: Abschätzung des Nenners Da $\sqrt{1+3/n} \geq 1$ für alle positiven ganzen Zahlen n gilt, folgt:

$$\sqrt{1+3/n} + 1 \geq 2.$$

Daraus ergibt sich die Ungleichung:

$$\frac{3/n}{\sqrt{1+3/n}+1} \leq \frac{3/n}{2} = \frac{3}{2n}.$$

Schritt 3: Wahl eines geeigneten N Damit $\frac{3}{2n} < \varepsilon$ gilt, muss

$$n > \frac{3}{2\varepsilon}$$

erfüllt sein.

Daher wählen wir $N = \left\lceil \frac{3}{2\varepsilon} \right\rceil$, sodass für alle $n > N$

$$\left| \sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1 \right| < \varepsilon$$

gilt.

Schlussfolgerung Nach der Definition des Grenzwerts folgt somit:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{3}{n}} = 1.$$

(c) $c_n = \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^n - 2^n}$;

Lösung.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^n - 2^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(1+(-2/3)^n)}{3^n(1-(2/3)^n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}(-2/3)^n}{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}(2/3)^n} = \frac{1+0}{1-0} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(d) $d_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$;

Lösung. Es gilt

$$\sqrt{n}-\sqrt{n+1} = (\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

Daraus folgt

$$|\sqrt{n}-\sqrt{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{4\varepsilon^2} < n.$$

Wir haben gezeigt, dass für alle $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$|\sqrt{n}-\sqrt{n+1}| < \varepsilon$$

gilt, falls $n > N := [(4\varepsilon^2)^{-1}] + 1$, $[x]$ bezeichnet den ganzzahligen Anteil von x.

***(e)** $e_n = \sqrt[n]{5^n + 11^n + 17^n}$.

Lösung. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$17^n < 5^n + 11^n + 17^n < 17^n + 17^n + 17^n = 3 \cdot 17^n.$$

Dies impliziert Folgendes:

$$17 = \sqrt[n]{17^n} < \sqrt[n]{5^n + 11^n + 17^n} < \sqrt[n]{3 \cdot 17^n} = \sqrt[n]{3} \cdot 17. \tag{1}$$

Aus Übung 2.3 folgt, dass $\sqrt[n]{3}$ nach 1 konvergiert. Daher konvergieren beide Seiten der Gleichung gegen 17. Nach dem Sandwichsatz, schliessen wir, dass e_n nach 17 konvergiert.

2.5. Divergente Folgen. Finden Sie Beispiele für reelle Folgen (x_n) und (y_n), so dass $x_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$ und

(a) $x_n + y_n \to +\infty$;

Lösung. Sei $x_n = n^2$ und $y_n = -n$. Dann gilt: $x_n + y_n = n^2 - n = n(n-1) \to +\infty$.

(b) $x_n + y_n \to -\infty$;

Lösung. Sei $x_n = n$ und $y_n = -n^2$. Dann gilt: $x_n + y_n = n - n^2 = -n(n-1) \to -\infty$.

(c) $(x_n + y_n)$ konvergiert;

Lösung. Sei $x_n = n$ und $y_n = -n$. Dann gilt: $x_n + y_n = n - n = 0 \to 0$.

(d) $(x_n + y_n)$ beschränkt ist und divergiert.

Lösung. Sei $x_n = (-1)^n + n$ und $y_n = -n$. Dann gilt: $x_n + y_n = (-1)^n + n - n = (-1)^n$.