3.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz. Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Welche der folgenden Aussagen gelten?

☑ Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Richtig. Da $\lim a_{n+1} = \lim a_n$ *ist,* $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$

☐ Wenn die Folge $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Falsch: Sei $a_n = \sum_{k=1}^n (1/k)$. *Dann* $\lim a_{n+1} - a_n = 0$. *Aber* a_n *divergiert.*

☑ Jede null Folge ist beschränkt.

Richtig. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(b) Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei definiert durch

$$a_n = \begin{cases} 1 + \sqrt{\frac{k}{12k+1}}, & \text{falls } n = 3k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \frac{5k^3+k}{k^3+1}, & \text{falls } n = 3k+2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \frac{(-1)^k}{k}, & \text{falls } n = 3k+3 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

☑ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert in $\mathbb{R}$;
Falsch: Die Teilfolge $(a_{3k+1})_k$ konvergiert gegen $1 + \sqrt{1/12}$, die Teilfolge $(a_{3k+2})_k$ konvergiert gegen 5 und die Teilfolge $(a_{3k})_k$ gegen 0. Es folgt, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ nicht konvergiert.

☐ $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert in $\mathbb{R}$;
Richtig: Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ hat die untere Schranke -1. Also existiert der Limes inferior von $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$.

☑ $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1 + \sqrt{1/12}$;
Falsch: Wie oben bemerkt ist $\{0, 1 + \sqrt{1/12}, 5\}$ die Menge der Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Der größte Häufungspunkt 5 ist der Limes superior.

(c) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Sei $(q_n)_{n\geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen, sodass

$$|q_n - q_{n+1}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Dann ist $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Falsch: Sei $q_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Dann ist $q_n \in \mathbb{Q}$ und es gilt $|q_n - q_{n+1}| = |-\frac{1}{n+1}| \to 0$ für $n \to \infty$, aber $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge, denn

$$q_{2n} - q_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

☑ Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, und σ eine Permutation von $\{1, 2, 3, \dots\}$ (d.h. eine Bijektion der Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ auf sich selbst). Dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\geq 1}, b_n = a_{\sigma(n)}, \forall n \geq 1$.
Richtig. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Es gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\epsilon : |\alpha - a_n| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Wir definieren $m_\varepsilon = \max(\{k : \sigma(k) \leq n_\varepsilon\})$. Es ist $m_\varepsilon < \infty$, weil $n_\varepsilon < \infty$ und σ eine Bijektion ist. Dann gilt $|\alpha - b_n| = |\alpha - a_{\sigma(n)}| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m_\varepsilon$. Somit folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

(d) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Dann

☐ konvergiert $\sum_{n=1}^\infty \sqrt{x_n}$;
Falsch. Zum Beispiel ist $x_n = 1/n^2$ Cauchy (weil konvergent), aber wie bekannt ist $\sum_{n=1}^\infty 1/n$ divergent.

☐ kann $(x_n)_n$ unbeschränkt sein;
Falsch. Jede Cauchy-Folge ist konvergent, also beschränkt.

☑ gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $m, n > N$

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Richtig. Das ist die Definition einer Cauchy-Folge.

***3.2. Grenzwert.** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+4}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-19)^n - \pi}{13^n + 1}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2022)^n + (-2023)^n}{(-2022)^{n+1} - (-2023)^n}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$.

Lösung.

(a) **Behauptung:** Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+4} = 1$
Beweis: Wir haben die folgende Ungleichungen

$$b_n := \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{3n+4} \leq c_n := \sqrt[n]{8n}.$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass $b_n \to 1$ für $n \to \infty$. Wir zeigen nun, dass auch c_n gegen 1 konvergiert, dies zeigt dann, dass auch die ursprüngliche Folge gegen 1 konvergiert.
Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{8} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Nach Übung 2.3 wissen wir, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8} = 1$

(b) Es gilt

$$\frac{(-19)^n - \pi}{13^n + 1} = \left(-\frac{19}{13}\right)^n \cdot \frac{1 - \pi \cdot (-19)^{-n}}{1 - 13^{-n}}$$

Während der zweite Bruch gegen 1 konvergiert, hat der Faktor $\left(-\frac{19}{13}\right)^n$ ein alternierendes Vorzeichen und der Betrag geht gegen unendlich. Damit divergiert die Folge, der Limes existiert nicht.

(c) Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2024)^n + (-2025)^n}{(-2024)^{n+1} - (-2025)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2024/2025)^n + 1}{(2024/2025)^n \cdot (-2024) - 1}$$
$$= -1.$$

Hinweis: In der letzten Gleichung haben wir verwendet, dass der Zähler $(2024/2025)^n + 1$ gegen 1 konvergiert, während der Nenner $(2024/2025)^n \cdot (-2024) - 1$ gegen -1 konvergiert.

(d) Wir können der n-ten Term der Folge als

$$\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2} = \left(\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right)^{\frac{1}{n}}$$

schreiben und wir wissen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}=\mathrm{e},$$

weil $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=\mathrm{e}$ und $n\mapsto(1+1/n^3)^{n^3}$ eine Teilfolge von $n\mapsto(1+1/n)^n$ ist.

Wir haben deshalb für jedes $n\in\mathbb{N}$:

$$1\le\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\le M,$$

wobei $M\in\mathbb{R}$ eine Schranke von $(1+1/n^3)^{n^3}$ ist. Da $x\le y \implies \sqrt[n]{x}\le\sqrt[n]{y}$, gilt auch:

$$1\le\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}\le\sqrt[n]{M}$$

Nach Übung 2.3 wissen wir, dass $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1$ und nach Sandwichsatz schliessen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}=1.$$

***3.3. Fibonacci.** Die reelle Folge $(a_n)_{n\ge1}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_1=1,\qquad a_2=1,\qquad a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\quad\text{für } n\ge2.$$

(a) Beweisen Sie folgende explizite Formel durch vollständige Induktion.

$$a_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right).$$

Lösung: Es sei $\Phi:=\frac12(1+\sqrt5)$ und $\Psi:=\frac12(1-\sqrt5)$. Zu beweisen ist $a_n=\frac{1}{\sqrt5}(\Phi^n-\Psi^n)$. Man beachte, dass a_{n+2} sowohl von a_{n+1} als auch a_n abhängt. Die vollständige Induktion muss daher bei $n=1$ und $n=2$ verankert werden und der Induktionsschritt schliesst von n und $n+1$ auf $n+2$.

Verankerung. Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt5}(\Phi^1-\Psi^1)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{2\sqrt5}{2}\right)=1=a_1,$$
$$\frac{1}{\sqrt5}(\Phi^2-\Psi^2)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+2\sqrt5+5}{4}-\frac{1-2\sqrt5+5}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{4\sqrt5}{4}\right)=1=a_2.$$

Induktionsannahme. Für gewisses $n \geq 1$ gelte

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^n - \Psi^n\Big), \qquad a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}\Big).$$

Induktionsschritt. Wir folgern die Behauptung für $n+2$. Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^n - \Psi^n\Big) + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}\Big) \qquad \text{(Induktionsannahme)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Phi^n(1+\Phi) - \Psi^n(1+\Psi)\Big). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, falls $(1+\Phi) = \Phi^2$ und $(1+\Psi) = \Psi^2$ gilt. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \Phi + 1, \\ \Psi^2 &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \Psi + 1. \end{aligned}$$

Somit ist wie behauptet $a_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+2} - \Psi^{n+2})$.

(b) Berechnung von $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Es gilt die explizite Formel:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \Psi^n\right),$$

wobei $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\Psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Zunächst betrachten wir das Verhalten von Φ^n und Ψ^n für $n \to \infty$.

Da $\Phi > 1$, gilt $\Phi^n \to \infty$ für $n \to \infty$. - Da $|\Psi| < 1$, gilt $\Psi^n \to 0$ für $n \to \infty$.

Daher folgt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \Psi^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\infty - 0\right) = \infty.$$

und somit a_n divergiert gegen $+\infty$

(c) Zeigen Sie, dass $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gegen die goldene Zahl $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

Lösung. Aus der expliziten Formel bewiesen in der vorherigen Aufgabe folgt, dass für jedes $m \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}|b_m - \Phi| = \left|\frac{a_{m+1}}{a_m} - \Phi\right| &= \left|\frac{\Phi^{m+1} - \Psi^{m+1}}{\Phi^m - \Psi^m} - \Phi\right| \\ &= \left|\frac{\Phi\Psi^m - \Psi^{m+1}}{\Phi^m - \Psi^m}\right| = \left|\frac{\Phi - \Psi}{\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right)^m - 1}\right| \leq \frac{\sqrt{5}}{|\frac{\Phi}{\Psi}|^m - 1},\end{aligned}$$

wobei $\Phi - \Psi = \sqrt{5}$ und $\left|\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right)^m - 1\right| \geq |\frac{\Phi}{\Psi}|^m - 1$ verwendet wird.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Dann folgt aus der vorherigen Abschätzung

$$\begin{aligned}|b_m - \Phi| < \varepsilon \;&\Leftarrow\; \sqrt{5} < \varepsilon\Big(|\tfrac{\Phi}{\Psi}|^m - 1\Big) \\ &\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{5} + 1 < |\tfrac{\Phi}{\Psi}|^m \\ &\Leftrightarrow\; \log\Big(\tfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{5} + 1\Big) < m \log|\tfrac{\Phi}{\Psi}| \\ &\Leftrightarrow\; m > \frac{\log\Big(\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{5} + 1\Big)}{\log|\frac{\Phi}{\Psi}|} =: N(\varepsilon).\end{aligned}$$

Es sei $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ die Zahl $N(\varepsilon)$ aufgerundet. Somit existiert für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sodass $|b_m - \Phi| < \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $m \geq n(\varepsilon)$ folgt. Das heisst nach Definition, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Φ konvergiert.

(d) Finden Sie eine Zahl $n \geq 1$ sodass folgende Aussage gilt.

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n: \quad \left|b_m - \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \leq \tfrac{1}{100}.$$

Lösung: Gesucht ist die Zahl $n(\varepsilon)$ aus Teilaufgabe (b) für $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Also berechnen wir

$$N(\tfrac{1}{100}) = \frac{\log\Big(100\sqrt{5} + 1\Big)}{\log|\frac{\Phi}{\Psi}|} = \frac{\log\Big(100\sqrt{5} + 1\Big)}{\log\left|\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right|} \approx 5.625746.$$

Es folgt $n(\frac{1}{100}) = 6$, das heisst für alle natürlichen Zahlen $m \geq 6$ gilt $|b_m - \Phi| < \frac{1}{100}$.

3.4. Subsequenzkriterium. Beweisen Sie, dass wenn die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen L konvergiert, jede Teilfolge (b_n) von (a_n) auch gegen L konvergiert.

Lösung: Wir verwenden den Beweis durch Widerspruch.

Angenommen, (a_n) konvergiert gegen L, aber es existiert eine Teilfolge (b_n), die nicht gegen L konvergiert. Dann nehmen wir an, dass (b_n) nicht gegen L konvergiert und leiten einen Widerspruch her.

Da (b_n) nicht gegen L konvergiert, existiert gemäß der Definition des Grenzwerts eine Zahl $\epsilon_0 > 0$, sodass für alle $N \in \mathbb{N}$ unendlich viele Indizes $k \geq N$ existieren, bei denen gilt:

$$|b_k - L| \geq \epsilon_0.$$

Das bedeutet, dass die Teilfolge (b_n) unendlich viele Glieder enthält, deren Abstand zu L mindestens ϵ_0 ist.

Da (b_n) eine Teilfolge von (a_n) ist, gibt es eine streng monoton wachsende Folge von Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, sodass $b_n = a_{n_k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Für jedes k gilt also $b_k = a_{n_k}$, und da $|b_k - L| \geq \epsilon_0$, folgt:

$$|a_{n_k} - L| \geq \epsilon_0.$$

Daher gibt es unendlich viele Glieder a_{n_k}, bei denen gilt $|a_{n_k} - L| \geq \epsilon_0$, also hat die Folge (a_n) unendlich viele Glieder, deren Abstand zu L mindestens ϵ_0 ist.

Da (a_n) gegen L konvergiert, muss gemäß der Definition des Grenzwerts für jedes $\epsilon > 0$ eine Zahl $N' \in \mathbb{N}$ existieren, sodass für alle $n \geq N'$ gilt:

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

Wählen wir $\epsilon = \epsilon_0$, so existiert ein $N' \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N'$ gilt:

$$|a_n - L| < \epsilon_0.$$

Das steht im Widerspruch zu der vorherigen Feststellung, dass $|a_{n_k} - L| \geq \epsilon_0$.

Da diese Annahme zu einem Widerspruch führt, muss unsere ursprüngliche Annahme falsch sein. Also konvergiert jede Teilfolge von (a_n) gegen L.

3.5. Limes superior und Limes inferior I. Sei $x_n = 2^n(1 + (-1)^n) + 1$ für $n \geq 1$. Bestimmen Sie (mit Beweis):

(a) $\liminf_{n\to\infty} x_n$

Lösung: Für alle $n \geq 1$ gilt $x_n \geq 1$ und wenn n ungerade ist, dann $x_n = 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also, dass

$$\inf\{x_k \mid k \geq n\} = 1.$$

Daraus folgt, dass

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k \mid k \geq n\} = 1.$$

(b) $\limsup_{n\to\infty} x_n$.

Lösung: Für gerade n gilt $x_n = 2^{n+1} + 1$, was nach oben unbeschränkt ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also, dass

$$\sup\{x_k \mid k \geq n\} \geq \sup\{2^{k+1} + 1 \mid k \geq n, k \text{ gerade}\} = \infty.$$

Daraus folgt, dass $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$.

(c) $\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Lösung: Wir bemerken zuerst, dass $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 0$ für alle $n \geq 1$. Wenn n gerade ist, dann gilt

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2^{n+1} + 1},$$

was gegen 0 konvergiert. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also, dass

$$0 \leq \inf\{x_{k+1}/x_k \mid k \geq n\} \leq \inf\{1/(2^{k+1} + 1) \mid k \geq n, k \text{ gerade}\} = 0.$$

Daraus folgt, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_{k+1}/x_k \mid k \geq n\} = 0.$$

(d) $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Lösung: Wenn n ungerade ist, dann ist

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = x_{n+1} = 2^{n+2} + 1,$$

was nach oben unbeschränkt ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also, dass

$$\sup\{x_{k+1}/x_k \mid k \geq n\} \geq \sup\{2^{k+2} + 1 \mid k \geq n, k \text{ ungerade}\} = \infty.$$

Daraus folgt, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \infty.$$