Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

4.1. MC Fragen.

(a) Wir nehmen an, dass $\sum_{k\geq 1} a_k$ absolut konvergiert und dass $\sum_{k\geq 1} b_k$ konvergiert. Geben Sie die korrekte Antwort auf folgende zwei Fragen an.

(1) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k^2$

- ☐ konvergiert nicht notwendigerweise.
- ☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht notwendigerweise absolut.
- ☑ konvergiert immer absolut.
- ☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(2) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k b_k$

- ☐ konvergiert nicht notwendigerweise.
- ☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht notwendigerweise absolut.
- ☑ konvergiert immer absolut.

Lösung: Da die Reihen $\sum_{k\geq 1} a_k$ und $\sum_{k\geq 1} b_k$ konvergieren, sind $(a_k)_{k\geq 1}$ und $(b_k)_{k\geq 1}$ Nullfolgen. Insbesondere sind sie beschränkt. Daher existiert $C > 0$, so dass $|a_k| + |b_k| \leq C$ für alle $k \geq 1$. Dann gilt für alle $k \geq 1$, dass

$$|a_k|^2 \leq C|a_k|, \quad |a_k b_k| \leq C|a_k|.$$

Da die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$ absolut konvergiert, folgt aus dem Vergleichssatz somit, dass sowohl $\sum_{k\geq 1} a_k^2$ als auch $\sum_{k\geq 1} a_k b_k$ absolut konvergieren.

(b) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Welche Aussagen sind richtig?

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

  Falsch. Ein Gegenbeispiel ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

- ☑ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls die Folge (S_m) der Partialsummen $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ konvergiert.

- ☐ Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe ist, wobei $0 \leq b_n \leq a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

  Falsch. Zum Beispiel, sei $b_n = \frac{1}{2^n}$ *und* $a_n = 1$. *Dann gilt* $0 \leq b_n \leq a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2$, *aber* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist divergent.*

(c) Sei $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $b_n = a_{\phi(n)}$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.

Falsch. Gegenbeispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \Big(-\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{3} + \Big(-\frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{4} + \Big(-\frac{1}{4}\Big) + ...$$

konvergiert aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+(-1)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\Big(-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\Big(-\frac{1}{3}\Big)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\Big(-\frac{1}{4}\Big)+...$$

konvergiert nicht.

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.

Falsch. Gegenbeispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \Big(-\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{3} + \Big(-\frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{4} + \Big(-\frac{1}{4}\Big) + ...$$

konvergiert aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$$

konvergiert nicht.

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.

Falsch. Gegenbeispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

ist absolut konvergent aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+...$$

ist nicht konvergent.

☑ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.

Richtig. Eine Teilfolge oder eine Umordnung der absolut konvergenten Reihe ist auch absolut konvergent.

***4.2. Limit-Vergleichssatz** Sei (a_n) und (b_n) zwei Folgen, wobei $a_n, b_n > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, es existiert eine reelle Zahl $l > 0$, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = l$.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $N > 0$, wobei $\frac{l}{2}b_n < a_n < \frac{3l}{2}b_n$ für jedes $n > N$, gibt.

Lösung. $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = l$ bedeutet, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N > 0$ gibt, so dass $|a_n/b_n - l| < \varepsilon$, falls $n > N$. Entsprechend haben wir

$$\begin{aligned} n > N \iff & -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - l < \varepsilon \\ \iff & l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon \\ \iff & (l-\varepsilon)b_n < a_n < (l+\varepsilon)b_n. \end{aligned}$$

Dies gilt für jedes ε. Wir können deshalb auch ein N finden, so dass es für $\varepsilon = \frac{l}{2}$ gilt. Das zeigt, dass die vorausgesetzte Ungleichung gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Lösung. Sei $N \in \mathbb{N}$ die kleineste natürliche Zahl, so dass die Ungleichung

$$\frac{l}{2}b_n < a_n < \frac{3l}{2}b_n$$

für jedes $n > N$ gilt.

Falls $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ konvergiert, konvergiert gemäss der oben genannten Ungleichung und dem Vergleichssatz auch $\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$. Ähnlich, falls $\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$ konvergiert, konvergiert gemäss der oben genannten Ungleichung und dem Vergleichssatz auch $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$.

Da die Konvergenz einer Reihe nicht von ihren ersten N Termen abhängt, ist damit der Beweis abgeschlossen.

(c) Das Obenstehende gilt nicht, wenn $a_n/b_n \to 0$. Finden Sie ein Beispiel, bei dem $a_n, b_n > 0$, $a_n/b_n \to 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert.

Lösung. Ein Beispiel wäre

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

Dann gilt $a_n, b_n > 0$, $a_n/b_n \to 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert.

***4.3. Reihe I.** Untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen. Wenn die Reihe konvergiert, berechnen Sie den Wert der Reihe.

(a) $\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

Lösung: Es gilt

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{k+1-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}.$$

In letzterer Darstellung sieht man direkt, dass die Folge definiert durch

$$a_k=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

nichtnegativ und monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert. Somit konvergiert die vorliegende Reihe nach dem Leibniz-Kriterium. Um zu zeigen, dass sie nicht absolut konvergiert, stellen wir fest, dass

$$\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n+1}-1,$$

was nach oben unbeschränkt ist.

(b) $\sum_{k\geq 1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\frac{1}{2^k}$

Lösung: Wir wenden das Wurzelkriterium an:

$$\sqrt[k]{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\frac{1}{2^k}}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\frac{1}{2}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{e}{2}$$

gemäß Beispiel 2.2.6. Da $e>2$ ist, folgt aus dem Wurzelkriterium, dass die vorliegende Reihe divergiert.

(c) $\sum_{k\geq 1}\frac{3}{2k+2}$

Lösung: Wir stellen fest, dass

$$\frac{3}{2k+2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k+1}.$$

Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert auch die vorliegende Reihe.

4.4. Reihe II. Sei $\sum_{k=1}^{\infty}a_n$ konvergent, mit $a_k\geq 0, \forall k\geq 1$. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{a_k a_{k+1}}$$

konvergiert.

Lösung.

Da sämtliche a_k positiv sind, können wir die Wurzel nehmen. Wir beobachten

$$0 \leq \left(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}\right)^2 = a_k - 2\sqrt{a_k a_{k+1}} + a_{k+1}$$

und daraus folgt

$$\sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \frac{a_k + a_{k+1}}{2}.$$

Mit dieser Ungleichung können wir die Partialsummen von oben abschätzen:

$$\begin{aligned} S_n := \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k a_{k+1}} &\leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) + \left(\frac{a_2 + a_3}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right) \\ &= \frac{a_1}{2} + \sum_{k=2}^{n} a_k + \frac{a_{n+1}}{2} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n+1} a_k =: T_{n+1} \end{aligned}$$

Die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ist äquivalent zur Beschränktheit (von oben) der Partialsummen T_n, siehe Satz 2.42. Per Annahme (Konvergenz der Reihe) sind also die T_n's von oben beschränkt. Insbesondere zeigt die Ungleichung oben, dass auch die Partialsummen S_n von oben beschränkt sind, und somit impliziert Satz 2.42, dass auch $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ konvergiert.

4.5. Reihe III. Sei

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

konvergent. Zeige, dass

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

für jedes $N \geq 0$ konvergent ist. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Grenzwerten?

Lösung. Sei a der Grenzwert von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Wir behaupten, dass $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$, für jedes $N \geq 0$, gegen den Grenzwert

$$A_N := a - \sum_{k=0}^{N-1} a_k$$

konvergiert. Da die erste Reihe gegen a konvergiert, wissen wir (per Definition), dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $K > 0$ gibt, so dass für alle $m \geq K$ gilt:

$$1 \left| a - \sum_{k=0}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Für $m \geq \max\{N, K\}$ erhalten wir

$$\left| A_N - \sum_{k=N}^{m} a_k \right| = \left| a - \sum_{k=0}^{N-1} a_k - \sum_{k=N}^{m} a_k \right| = \left| a - \sum_{k=0}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Das beweist, dass die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ gegen A_N konvergiert.

4.6. Komplexe Folgen Sei (a_n) eine komplexe Folge, sodass

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchy Folge ist. Folgern, dass (a_n) konvergent ist.

Lösung: Sei $m \geq n$. Dann es gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - \cdots + a_{m-1} - a_m| \\ &\leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{m-1} - a_m| \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} = \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{2^j}. \end{aligned}$$

Im Beispiel 2.7.2 haben wir gezeigt dass die Reihe

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j}$$

gegen 2 konvergiert. (Das ist eine Geometrische Reihe). Aus Satz 2.7.5 folgt, dass für alle $\varepsilon > 0$, gibt es $N \geq 1$, sodass

$$\left|\sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{2^j}\right| \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Das impliziert, dass (a_n) eine Cauchy Folge ist. Aus Satzt 2.6.6 konvergiert die Folge genau dann, wenn (a_n) Cauchy ist.