Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

**5.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz** Wählen Sie die richtigen Antworten.

**(a)** Wir nehmen an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergiert und $\alpha > 0$. Definiere:

$$a_n = c_n \alpha^n$$
$$b_n = n c_n \alpha^{n-1}$$

Welche Aussage trifft zu?

- ☐ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} > \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.
- ☐ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} < \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.
- ☑ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.
- ☐ Die Informationen genügen nicht um zu schliessen.

**Lösung.**

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} |b_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|}\alpha^{1-1/n} &= \alpha \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|}\alpha^{-1/n} \\ &= \alpha \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \\ &= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\end{aligned}$$

**(b)** Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert und dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert. Geben Sie die korrekte Antwort auf folgende zwei Fragen an.

(A) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$

- ☐ konvergiert nicht unbedingt.
- ☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.
- ☑ konvergiert immer absolut.
- ☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(B) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

☐ konvergiert nicht unbedingt.

☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.

☑ konvergiert immer absolut.

☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

**Lösung.** $(a_k)$ und $(b_k)$ sind beschränkt. Dann $\exists\, C > 0$, $|a_k| + |b_k| < C$ und

$$|a_k|^2 < C|a_k|, \quad |a_k b_k| < C|a_k|.$$

**(c)** Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert und dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

☑ konvergiert nicht unbedingt.

☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.

☐ konvergiert immer absolut.

☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

**Lösung.**

- $a_k = b_k = 1$, dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ divergiert.
- $a_k = b_k = 1/n$, dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergiert absolut.
- $a_k = 1/n$, $b_k = (-1)^k$ dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut.

**(d)** Sei $(x_n)$ eine reelle Folge, sodass $x_n \leq \frac{1}{n^2}$ für alle $n \geq 1$.

☐ Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ ist konvergent, aber nicht unbedingt absolut konvergent. ϟ: $x_n = -n$.

☐ Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ ist absolut konvergent. ϟ: $x_n = -n$.

☑ Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ ist absolut konvergent, falls $|y_n| \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

**Lösung.** Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\left|\sum_{n=m}^{M} \frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon, \forall M \geq m \geq N_0$. Dann folgendes gilt: $\sum_{n=m}^{M} |y_n| \leq \sum_{n=m}^{M} \frac{1}{n^2} < \varepsilon$, für alle $M \geq m \geq N_0$, woraus folgt, dass die Reihe absolut konvergent ist.

**5.2. Wurzelkriterium „starker” als Quotientkriterium.** Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf |a_n|^{1/n} \leq \limsup |a_n|^{1/n} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

**Lösung.** Die zweite Ungleichung folgt aus der Definition von lim sup und lim inf. Wir zeigen die dritte Ungleichung; der Beweis der ersten Ungleichung ist ähnlich.

Sei

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Falls $\alpha = +\infty$, gibt es nichts zu beweisen. Falls $\alpha$ endlich ist, wähle $\beta > \alpha$. Es gibt dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \beta$$

für $n \geq N$.

Nach Multiplikation $k$ solcher aufeinanderfolgender Terme erhalten wir:

$$\left|\frac{a_{N+k}}{a_N}\right| = \left|\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{N+k-1}}{a_{N+k-2}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| \leq \beta^k.$$

Das heisst,

$$|a_n| \leq |a_N|\beta^{-N} \cdot \beta^n \qquad (n \geq N+1).$$

Deshalb gilt es

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{|a_N|\beta^{-N}} \cdot \beta,$$

so dass, nach Übung 2.3, wir

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta \tag{1}$$

erhalten. Gleichung (1) gilt für jedes $\beta > \alpha$, und deshalb gilt auch

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \alpha.$$

***5.3. Reihen I.** Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{n+1}}$,

**(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+1}$,

**(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$.

Bestimmen Sie, falls existent, die Werte von (d).

**Lösung.** Wir bezeichnen mit $a_n$ das Glied jeder Folge.

**(a)** Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz. Wir benutzen das Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{((n+1)n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+1)},$$

also $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/4 < 1$. Damit schliessen wir, das die Reihe absolut konvergent ist.

**(b)** Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz. Wir benutzen das Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{5}{n^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{5}{n\sqrt[n]{n}}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 5/n = 0 < 1$, also ist die Reihe absolut konvergent.

**(c)** Wir sehen, dass

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

also muss die Reihe divergent sein (Bemerkung 3.7.1).

**(d)** Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz, und wir bemerken, dass diese Reihe ähnlich wie die Teleskopsumme ist. Wir suchen zuerst $a$ und $b$ so dass

$$\frac{1}{n(n+4)} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+4}.$$

Wir sehen, dass

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n+4} = \frac{(a-b)n + 4a}{n(n+4)},$$

also finden wir $a = b = 1/4$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \dots\right).$$

Also folgern wir, wie für die Teleskopsumme, dass die Partialsummen die Form

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4}\right)$$

haben. Somit schliessen wir, dass die Reihe absolut konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{48}$$

ist.

***5.4. Komplexe Reihe** Sei $(x_n)$ eine komplexe Folge, sodass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ konvergent ist.

**(a)** Zeigen Sie, dass $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $|x_n^2| \leq |x_n|$ für alle $n \geq N_0$ ist.

**Lösung.** Die Konvergenz der Reihe impliziert, dass $x_n$ gegen 0 konvergiert. Sei $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n| < 1$ für alle $n \geq N_0$. Dann gilt: $|x_n^2| = |x_n|^2 \leq |x_n|$ für jedes $n \geq N_0$.

**(b)** Folgern, dass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$ absolut konvergent ist, falls $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ absolut konvergent ist.

**Lösung.** Sei $\varepsilon > 0$. Die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_n x_n$ impliziert, dass $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$\sum_{n=m}^{M} |x_n| < \varepsilon, \quad \forall M \geq m \geq N.$$

Sei $N_1 := \max\{N_0, N\}$. Dann aus Aufgabe 5.3(a) folgt:

$$\sum_{n=m}^{M} |x_n|^2 \leq \sum_{n=m}^{M} |x_n| < \varepsilon, \quad \forall M \geq m \geq N_1,$$

woraus $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$ absolut konvergent ist.

**(c)** Zeigen Sie, dass, wenn $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ nicht absolut konvergent ist, es sein kann, dass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$ divergiert.

**Lösung.** Die Reihe von Aufgabe 5.2 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ist konvergent aber nicht absolut konvergent, und

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

divergent ist.

**5.5. Wurzelkriterium** Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und ganze Zahl $n \geq 1$ existiert eine einzige Zahl $y$, sodass $y^n = x$ ist. Wir bezeichnen $y = \sqrt[n]{x}$.

Sei $(x_n)$ eine komplexe Folge, sodass die Folge $\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right)$ gegen $\ell \in \mathbb{R}$ konvergente ist.

**(a)** Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ absolut konvergent ist, falls $\ell < 1$ ist.

**Lösung.** Sei $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left|\sqrt[n]{|x_n|} - \ell\right| < (1-\ell)/2, \quad \forall n \geq N_0.$$

Dann gilt $\sqrt[n]{|x_n|} < \ell + (\ell - 1)/2 = (3\ell - 1)/2 = q$, woraus

$$|x_n| < q^n, \quad \forall n \geq N_0$$

folgt. Da $q < 1$ folgt aus dem Vergleichssatz 2.43, dass die Reihe absolut konvergent ist.

**(b)** Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergent ist, falls $\ell > 1$ ist.

**Lösung.** Sei $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left|\sqrt[n]{|x_n|} - \ell\right| < (\ell - 1)/2, \quad \forall n \geq N_0.$$

Dann gilt $\sqrt[n]{|x_n|} > \ell - (\ell - 1)/2 = (\ell + 1)/2 = p$, woraus

$$|x_n| > p^n, \quad \forall n \geq N_0$$

folgt. Da $p > 1$ die Folge divergent ist.