Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

6.1. Doppelte Summation, monotone Funktionen, Stetigkeit. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Sei $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$ eine reelle Doppelfolge. Welche der folgenden Bedingungen impliziert, dass die folgende Gleichung gilt?

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}\right)?$$

☐ Keine Bedingung ist erforderlich. Diese Gleichung ist immer wahr.

☐ Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $|a_{m,n}| \leq C$ für alle $m, n \geq 0$.

☐ Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} a_{m,n} \leq C, \quad \forall M, N \geq 0.$$

☑ Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} |a_{m,n}| \leq C, \quad \forall M, N \geq 0.$$

Lösung: Das Beispiel auf Seite 37 im Skript ist ein Gegenbeispiel für die ersten drei Antwortmöglichkeiten ($a_{m,m} = 1$ und $a_{m,m+1} = -1$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $a_{m,n} = 0$ wenn $n \notin \{m, m+1\}$). Dass die vierte Bedingung hinreichend ist, folgt aus dem Doppelreihensatz (Satz 2.7.23).

(b) Sei $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho \in (0, \infty)$. Sei außerdem ρ' der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geq 1} n c_n z^{n-1}$. Welche Aussage trifft zu?

☐ $\rho > \rho'$

☐ $\rho < \rho'$

☑ $\rho = \rho'$

☐ Es liegen nicht genügend Informationen vor, um dies zu entscheiden.

Lösung: Für die Bestimmung des Konvergenzradius ρ' macht es keinen Unterschied, ob wir $\sum_{n\geq 1} nc_n z^{n-1}$ oder $\sum_{n\geq 1} nc_n z^n$ betrachten. Es gilt nun:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot \sqrt[n]{|c_n|} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Also stimmen ρ und ρ' überein. Wir haben in obiger Rechnung folgenden Fakt verwendet:

Fakt: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ eine nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(c) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- ☐ $\exp(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
  Falsch: Die Summe müsste bei $n = 0$ starten.
- ☐ $\exp(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$,
  Falsch: Auf $\mathbb{C}$ nimmt das Exponential auch komplexe Werte an, e.g. $\exp\left(\frac{\pi i}{2}\right) = i$. Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnungsrelation ">".
- ☑ $\exp : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt, wobei $a, b \in \mathbb{R}$,
  Wahr: Das Exponential ist strikt monoton steigend auf $\mathbb{R}$, daher gilt $\exp([a, b]) \subseteq [\exp(a), \exp(b)]$.
- ☐ $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3} = 1$
- ☑ $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n} = 1.$
  Wahr: Es gilt $\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right)^{\frac{1}{n^2}}$.
  Der Term in der inneren Klammer strebt gegen $\exp(1) = e$ für n gegen Unendlich. **(Das Limit innerhalb der ersten Klammer** $\lim(1+1/n^3)^{n^3} = exp(1)$ **und NICHT 1.)** Das resultierende Limit ist 1 weil e^{1/n^2} gegen 1 geht.

***6.2. Konvergenzradius** Untersuchen Sie die absolute Konvergenz und den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{4n!} z^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9i}{n^2} z^{2n}$.

Lösung: Sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen. Wir erinnern daran, dass die Definition

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}, & \text{falls } \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 0, \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Die zugehörige komplexe Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut für $|z| < R$ und divergiert für $|z| > R$. Da

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)^{1/n}} = 1,$$

folgt, dass die erste Potenzreihe absolut konvergiert, falls $|z| < 1$.

Für die zweite Reihe gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{e^{in}}{4n!}\right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(4n!)^{1/n}} = 0,$$

was bedeutet, dass die zweite Reihe überall konvergiert.

Für die dritte Reihe setzen wir $k = 2n$ und schreiben sie um:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9i}{n^2} z^{2n} = \sum_{k \text{ gerade}} \frac{36i}{k^2} z^k,$$

sodass wir überprüfen müssen:

$$\limsup_{k\to\infty,\ k \text{ gerade}} \left|\frac{36i}{k^2}\right|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} \frac{36^{1/k}}{(k)^{2/k}} = 1.$$

Daraus folgt, dass der Konvergenzradius der dritten Reihe gleich eins ist.

6.3. Vertauschen von Limes und unendlicher Summation. Lesen Sie die Aussage von Satz 2.7.28 im Skript.

(a) Definiere für $j, n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(j) := \begin{cases} 1, & \text{falls } j = n, \\ 0, & \text{falls } j \neq n. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ existiert, dass aber

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) \neq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

gilt. Wieso ist Satz 2.7.28 hier nicht anwendbar?

Lösung: Für jedes $j \in \mathbb{N}$ und alle $n > j$ haben wir $f_n(j) = 0$, also existiert der Grenzwert $f(j) = \lim_{n\to\infty} f_n(j) = 0$, was zu $\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = 0$ führt. Andererseits haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\sum_{j=0}^{\infty} f_n(j) = 1$ ist, und daher $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j) = 1$.

Satz 2.7.28 kann in diesem Fall nicht angewendet werden, da Bedingung (2) nicht erfüllt werden kann: Wegen Teil 2.1 der Bedingung müsste $g(j) \geq 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gelten, sodass $\sum_{j=0}^{\infty} g(j) = \infty$ folgt, und Teil 2.2 der Bedingung nicht erfüllt sein kann.

***6.4. Zeige, dass das Cauchy Produkt der beiden *divergenten* Reihen**

$$2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots \quad \textbf{und} \quad -1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

absolut konvergiert.

Beweis: Wir definieren:

$$a_i = \begin{cases} 2, & i = 0 \\ 2^i, & i = 1, 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

und

$$b_j = \begin{cases} -1, & j = 0 \\ 1, & j = 1, 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

und berechnen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \cdot b_j \right).$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \cdot b_j \right) &= a_0 \cdot b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \cdot b_j \right) \\
&= a_0 \cdot b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 2 \right) \\
&= -2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 2 \right) \\
&= -2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - 2^n \right) \\
&= -2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1 - 2^n}{1 - 2} - 2^n \right) \\
&= -2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - (1 - 2^n) - 2^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \text{mit } c_0 = -2 \text{ und } c_n = 0 \text{ für alle } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Offensichtlich konvergiert also das Cauchy Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.