Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

7.1. MC Fragen: Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zur Stetigkeit von f?

☐ Für alle $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass für alle $z \in D$ gilt:

$$z \in (x-\delta, x+\delta) \implies f(z) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon).$$

Wahr: Das ist genau die Definition aus der Vorlesung, aber mit der Intervallschreibweise.

☐ Für alle $x \in D$ existiert ein $\delta > 0$ so dass für alle $\varepsilon > 0$ und $z \in D$ gilt:

$$|z-x| < \delta \implies |f(z)-f(x)| < \varepsilon.$$

Falsch: Die Quantoren sind in der falschen Reihenfolge.

☐ Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so dass für alle $x, z \in D$ gilt:

$$|x-z| < \delta \implies |f(x)-f(z)| < \varepsilon.$$

Falsch: In der Stetigkeitsdefinition hängt δ vom Stetigkeitspunkt x_0 ab. Hier aber wird behauptet, dass es ein δ gibt, welches gleichzeitig für alle x funktioniert. Die Aussage ist somit echt stärker als Stetigkeit und wird oft *gleichmäßige Stetigkeit* genannt.[1]

☐ Alle obigen Definition sind falsch.

Falsch.

(b) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen, $D \subseteq \mathbb{R}$.

☐ $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend.

Falsch. Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $f(x) = g(x) = x$ *mit* $D = \mathbb{R}$.

☐ Angenommen $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $\frac{f}{g}$ monoton wachsend.

Falsch. Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $D = (0, +\infty)$, $f(x) = x$ *und* $g(x) = x^2$, *da dann* $\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{x}$ *nicht monoton wachsend ist.*

[1]

☐ Angenommen, $f(x), g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $\frac{f}{g}$ oder $\frac{g}{f}$ monoton wachsend.

Falsch. Sei $D = (0, +\infty)$ *und definiere*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1] \\ x^2, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0,1] \\ x, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

Dann sind weder $\frac{f}{g}$ *noch* $\frac{g}{f}$ *monoton:*

$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ x, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

und

$$\frac{g}{f}(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1] \\ \frac{1}{x}, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

☑ Alle origin Aussagen sind falsch.

(c) Kreuze die richtigen Aussagen an.

☐ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt $\implies$ f monoton.

Falsch. Die Funktion $f(x) = |x-1|$ *ist zwar beschränkt, aber nicht monoton.*

☐ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ strikt monoton wachsend $\implies$ f stetig.

Falsch. Die Funktion kann trotzdem einen unstetigen SSprung"haben:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ x+1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

☐ $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ monoton $\implies$ f beschränkt.

Falsch. Der Logarithmus $\ln : (0,1] \to \mathbb{R}$ *ist monoton, aber nicht beschränkt.*

☑ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ monoton $\implies$ f beschränkt.

Richtig. Angenommen f ist monoton fallend (der Fall „steigend“ ist analog). Dann gilt $f(1) \leq f(y) \leq f(0)$ für alle $y \in [0,1]$, das heißt

$$f(y) \in [f(1), f(0)], \quad \forall y \in [0,1],$$

was Beschränktheit von f zeigt.

(d) Welche der folgenden Bedingungen impliziert **nicht**, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist?

☐ Es gibt $C \geq 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Falsch: Diese Bedingung impliziert die Stetigkeit. In der Tat, wenn $C = 0$, dann ist f konstant, und sonst wähle in der Definition der Stetigkeit $\delta = \varepsilon/C$.

☑ Es gibt $C \geq 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \geq 1$.

Richtig: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $C = 1$, $f(x) = 0$ wenn $x < 0$ und $f(x) = 1$ wenn $x \geq 0$. Diese Funktion ist unstetig in $x_0 = 0$, jedoch gilt $|f(x) - f(y)| \leq 1 \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \geq 1$.

☐ Es gibt $C \geq 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \leq 1$.

Falsch: Diese Bedingung impliziert die Stetigkeit. In der Tat, wenn $C = 0$, dann ist f konstant, und sonst wähle in der Definition der Stetigkeit $\delta = \min\left\{\sqrt{\varepsilon/C}, 1\right\}$.

***7.2. Stetigkeit I** Finden Sie die Werten $a, b \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + b, & \text{wenn } x \leq -1, \\ (a+b)x, & \text{wenn } -1 < x < 1, \\ x^2 + ax - b, & \text{wenn } x \geq 1 \end{cases}$$

definitert ist, stetig in $\mathbb{R}$ ist. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

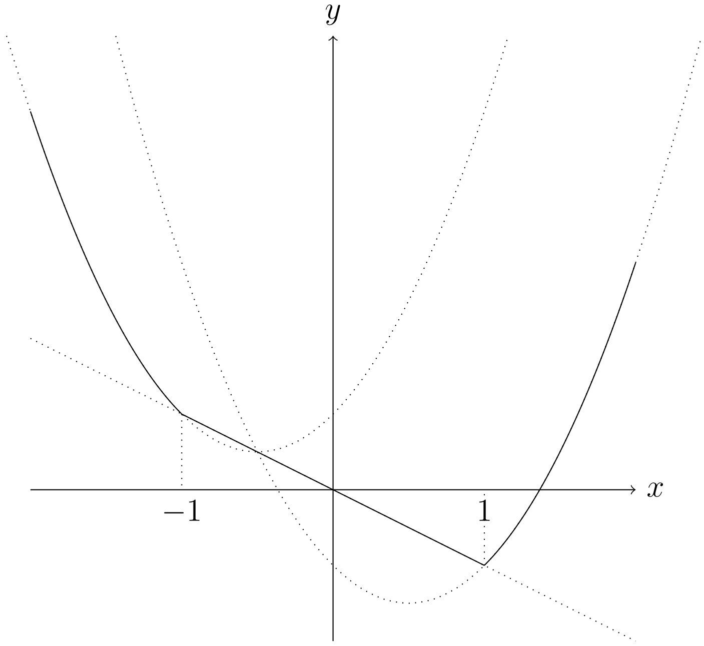
Lösung: Die polynomialen Funktionen

$$f_1(x) = x^2 - ax + b, \quad f_2(x) = (a+b)x, \quad f_3(x) = x^2 + ax - b,$$

sind stetig in $\mathbb{R}$ (Korollar 3.2.7). Folgendes gilt

$$f_1(-1) = f_2(-1) \text{ und } f_2(1) = f_3(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + b = -a - b, \\ a + b = 1 + a - b. \end{cases} \Leftrightarrow a = -1, b = \frac{1}{2}.$$

Hier ist eine Skizze der Funktion f. Gepunktete sind die Funktionen f_1, f_2 und f_3.



7.3. Zwischenwertsatz Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass es $x \in [0,1]$ gibt, sodass $f(x) = x$.

Lösung: Sei $g(x) = f(x) - x$. Dann ist $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Aus $f(x) \in [0,1] \, \forall x \in [0,1]$ folgt

$$g(0) = f(0) - 0 \geq 0, \quad g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es $x_0 \in [0,1]$ existiert, sodass $g(x_0) = 0$. Woraus $f(x_0) = x_0$ folgt.

***7.4. Stetigkeit II.** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nur in $x = 0$ stetig ist.

Lösung.

Zuerst zeigen wir, dass f in $x = 0$ stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir nehmen $\delta = \varepsilon$. Dann für jedes $x \in (-\delta, +\delta)$ gilt es

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon.$$

Deshalb ist f in $x = 0$ stetig.

Jetzt zeigen wir, dass in alle andere Punkten $x \neq 0$ die Funktion f nicht stetig ist. Nach Satz 3.7 genügt es eine Folge (a_n) zu finden, die nach x konvergiert und für welche $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(x)$.

Nehmen wir zuerst an, dass $x \neq 0$ in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegt. Dann ist $f(x) = 0$. Sei (a_n) eine Folge rationalen Zahlen, so dass $x \leq a_n \leq x + \frac{1}{n}$. Dann konvergiert a_n nach x und $f(a_n) = a_n$. Deshalb ist

$$f(x) = 0 \neq x = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Nehmen wir nun an, dass $x \neq 0$ in Q liegt. Dann ist $f(x) = x$. Sei (b_n) eine Folge irrationalen Zahlen, so dass $x \leq b_n \leq x + \frac{1}{n}$. Dann konvergiert b_n nach x und $f(b_n) = 0$. Deshalb ist

$$f(x) = x \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

7.5. Surjektivität von x^n. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon [0,\infty) \to [0,\infty), \qquad x \mapsto x^n$$

surjektiv ist.

Hinweis: Wir können nicht davon ausgehen, dass die Umkehrfunktion der Funktion $f(x) = x^n$ (d. h. die n-te Wurzelfunktion) existiert, ohne zu zeigen, dass die Funktion f surjektiv ist.

Lösung.

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt: $f(0) = 0$ und $f(m) = m^n$, wobei f stetig ist. Daher folgt aus dem Zwischenwertsatz (ZWS), dass $[0, m^n] \subset f([0, m])$, d. h. jeder Wert zwischen 0 und m^n wird angenommen.

Dann gilt:

$$[0,\infty) = \bigcup_{m\geq 1} [0, m^n] \subset f\left(\bigcup_{m\geq 1} [0, m]\right) = f([0,\infty)).$$