Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

8.1. MC Fragen.

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetigen Funktionen. Wählen Sie die richtige Aussagen.

☑ Falls f_n nach f gleichmässig konvergiert, konvergiert f_n nach f punktweise.

Richtig: Sei f_n eine gleichmässig konvergente Folge. Dann

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \textit{so dass} \quad n > N \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Insbesondere für jedes feste $x \in D$ gilt $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad$ so dass $\quad n > N \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, was die Definition von punktweiser Konvergenz ist.

☐ Falls $|f_n(x)| < c_n$ für $c_n \in \mathbb{R}$ und jedes $x \in D$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ punkteweise.

Falsch. Sei $f_n(x) = (-1)^n$. Dann gilt für $c_n = 1$ die Ungleichung $f_n(x) \leq c_n$, aber f konvergiert nicht.

☑ Falls $|f_n(x)| < c_n$ für jedes $x \in D$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ punkteweise.

Richtig. Nach Satz 3.38 konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmässig. Insbesondere, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ auch punktweise.

(b) Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x^{1/2} + n^{-1})^2.$$

Welche der Aussagen gilt?

☑ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Richtig: Es gilt $\lim_{n\to\infty}(x^{1/2}+n^{-1})^2 = (\lim_{n\to\infty}(x^{1/2}+n^{-1}))^2 = (x^{1/2})^2 = x$.

☐ Die Funktionenfolge konvergiert gleichmässig.

Falsch: Aus $|f_n(x) - x| = 2x^{1/2}/n + 1/n^2$ folgt, dass für $x > n^2$ auch $|f_n(x) - x| > 2$ ist. Also kann (f_n) nicht gleichmässig konvergiern.

- ☑ Für alle $M > 0$ gilt, dass die Funktionenfolge $f_n|_{[0,M]} : [0, M] \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

  Richtig: Es gilt $|f_n(x) - x| = 2x^{1/2}/n + 1/n^2 \leq 2M^{1/2}/n + 1/n^2$ *für alle* $x \in [0, M]$. *Da* $2M^{1/2}/n + 1/n^2 \to 0$ *folgt es, dass* $(f_n|_{[0,M]})$ *gleichmässig konvergiert.*

(c) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- ☑ $\exp\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt, wobei $a, b \in \mathbb{R}$
  Wahr: Das Exponential ist strikt monoton steigend auf $\mathbb{R}$,
  daher gilt $\exp([a, b]) \subseteq [\exp(a), \exp(b)]$.
- ☐ $(\exp \circ \ln)\left(\frac{a}{b}\right) = a - b$
  Falsch: Die linke Seite ist gleich $\frac{a}{b}$, was im Allgemeinen *nicht* gleich $a - b$ ist.
- ☑ $(\exp \circ \ln)(a + b) = a + b$
  Wahr: Der Logarithmus ln ist die Umkehrfunktion von exp.

(d) Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☑ Für $f(x) := \sin(x) \cdot \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$, gilt: $f(-x) = -f(x)$.
  Wahr.
- ☑ Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

  $$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (f(x))^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

  stetig.
  Wahr: Der Ausdruck ist gleich $\sin(f(x))$.
- ☐ Die Funktion $\cos \circ \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist monoton.
  Falsch.
- ☐ Die Funktion $\exp \circ \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv.
  Falsch.
- ☑ Die Funktion $\cos \circ \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und stetig.
  Wahr: Stetigkeit folgt weil die Verkettung von stetigen Funktionen wieder stetig ist. Beschränktheit folgt aus der Beschränktheit von cos (man beachte die Reihenfolge der Verkettung!).

8.2. Analysiere folgende Funktionen auf strikte Monotonie, und falls möglich, bestimme die Inverse Funktion.

(a) $f(x) = \ln(x-3) - 5$ für $x \in (3, +\infty)$

Lösung. Strikte Monotonie von f folgt sofort aus der strikten Monotonie von ln. Nach Satz 3.22 ist f somit invertierbar. Wir berechnen die Inverse g, indem wir im Ausdruck $y = \ln(x-3) - 5$ das x freistellen:

$$\exp(y) = (x-3) \cdot \exp(-5) \quad \Longrightarrow \quad x = \exp(5) \cdot \exp(y) + 3 = \exp(y+5) + 3$$

Also ist

$$g(y) = \exp(y+5) + 3$$

die Inverse von f.

(b) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$

Lösung. Die Funktion $x \mapsto e^x$ ist strikt monoton steigend und $x \mapsto e^{-x}$ ist strikt monoton fallend. Insbesondere ist $x \mapsto e^x - e^{-x}$ strikt monoton steigend, was zeigt, dass f strikt monoton steigend ist. Also ist f nach Satz 3.22 wiederum invertierbar.

Um die Inverse zu finden, brauchen wir ein paar Tricks: Wir wollen $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ nach x auflösen, was aber direkt nicht geht. Wir definieren $z = e^x$ und beobachten, dass

$$z^2 - 2yz - 1 = e^{2x} - 2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2} - 1 = 0.$$

Falls wir diese quadratische Gleichung in z lösen können, haben wir gewonnen. Wir berechnen:

$$z_1 = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1}, \quad z_2 = \frac{2y - \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1}.$$

Aber $\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2} = y$, da $y > 0$, was $z_2 < 0$ impliziert. Aber $e^x < 0$ hat keine reellen Lösungen, also betrachten wir nur $z_1 = e^x$ und nehmen den Logarithmus:

$$x_1 = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

Insbesondere ist

$$g(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

die gesuchte Inverse.

(c) $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$

Lösung. Die Funktion erfüllt $f(-x) = f(x)$ und ist somit symmetrisch bezüglich der y-Achse. Insbesondere kann f nicht injektiv sein (z. B. $f(2) = f(-2)$ aber $2 \neq -2$), und somit ist f nicht invertierbar.

Außerdem ist f nicht strikt monoton – dies folgt auch aus der Symmetrie.

8.3. Gleichmässige Konvergenz von Potenzreihen I. Sei $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$ eine Potenzreihe, die gleichmässig in $\mathbb{R}$ konvergiert. Beweisen Sie, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $c_n = 0$ für alle $n \geq N$ ist.

Lösung: Die gleichmässige Konvergenz der Potenzreihe bedeutet, dass die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ gleichmässig in $\mathbb{R}$ konvergiert. Wenn wir das Cauchy-Kriterium für gleichmässige Konvergenz auf die Folge der S_n anwenden, dann folgt (für $\varepsilon = 1$), dass es ein $N \in \mathbb{N}^*$ gibt, so dass für alle $m, n \geq N-1$ gilt, dass

$$|S_n(x) - S_m(x)| < 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $n \geq N$ und $m = n-1$ impliziert dies, dass

$$|c_n x^n| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| < 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wäre $c_n \neq 0$ für ein $n \geq N$, so könnten wir hieraus direkt einen Widerspruch erhalten, wenn wir $x = \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$ setzen. Somit folgt $c_n = 0$ für alle $n \geq N$.

***8.4. Konvergenz von Funktionenfolgen.** Konvergieren die folgenden Funktionenfolgen auf dem Intervall $[0,1]$ punktweise gegen eine Grenzfunktion f? Falls ja, bestimmen Sie f und untersuche, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(a) $f_n(x) := \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N};$

Lösung. Für alle $x \in [0,1]$ gilt für $f(x) = 1$

$$\begin{aligned} \Big|f(x) - f_n(x)\Big| &= \left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 - 1\right| = \left|1 + 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} - 1\right| \\ &= 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Somit gilt also

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

was die gleichmässige und damit auch die punktweise Konvergenz zeigt.

(b) $f_n(x) := \dfrac{\sin x}{n}$;

Lösung. Für $f(x) = 0$ gilt es

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin x}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

(c) $f_n(x) := 1 + x^n(1-x)^n, \quad n \in \mathbb{N}$;

Lösung. Wir zeigen, dass f_n nach $f(x) := 1$ gleichmässig konvergiert. Es gilt:

$$0 \leq x(1-x) \leq \tfrac{1}{4} \qquad \forall x \in [0,1].$$

Denn die erste Ungleichung gilt offensichtlich und ausserdem ist

$$x(1-x) = -x^2 + x = -(x-1/2)^2 + 1/4 \leq 1/4 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Somit ist $|x(1-x)| \leq \frac{1}{4}$ für $x \in [0,1]$ und

$$|f_n(x) - f(x)| = |(x(1-x))^n| = |x(1-x)|^n \leq (1/4)^n.$$

Somit gilt

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq (1/4)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

und die Folge konvergiert gleichmsig gegen f.

***8.5. Gleichmässigkonvergenz.** $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ sei beschränkt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und f_n konvergiere gleichmässig gegen f auf D. Dann zeigen Sie, dass $f \colon D \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Lösung. Nimmt man $\varepsilon = 1$ in der Definition der gleichmässigen Konvergenz, so ergibt sich, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $n > N$, $|f_n(x) - f(x)| < 1$ für alle $x \in D$.

Nun wählen Sie irgendein $n > N$. Da f_n beschränkt ist, gibt es eine Konstante M, so dass $|f_n(x)| \leq M$ für alle $x \in D$. Daraus folgt, dass

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 1 + M.$$

d.h. f ist beschränkt.

8.6. Trigonometrische Funktion.

(a) Zeige, dass $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{1}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{2}$$

Lösung.

$$\begin{aligned}\sin x - \sin y =& \sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)\\ =& \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\\ &- \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\\ =& 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\end{aligned}$$

$\cos x - \cos y$ ist ähnlich.

(b) Zeige dass $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ eine strong monoton stetige bijektive Abbildung ist.

Lösung. Wir haben (aus Zusammenfassungen der Vorlesung)

a) $\forall x \in (0, \pi), \sin x > 0$

b) $\sin\frac{\pi}{2} = 1, \cos\frac{\pi}{2} = 0, \sin 0 = \sin\pi = 0$

Dann

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \Longrightarrow \cos x > 0 \text{ wenn } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Da $\cos x$ eine grade Abbildung ist, gilt $\cos x > 0\ \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Wir wissen auch, dass $\cos 0 = 1, \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ gilt.

Streng monoton: $\forall -\frac{\pi}{2} \le y < x \le \frac{\pi}{2}$, $\frac{x-y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0$$

Stetig: Satz 3.41 in Skript.

Bijektiv:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \sin\frac{\pi}{2} = 1, \sin \text{ ist stetig und strong monoton auf } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$\Longrightarrow \sin$ ist bijektiv (Zwischenwertsatz)

(c) Zeige für alle $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq x \leq \sqrt{(4k+5)(4k+6)}$ gilt:

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... - \frac{x^{2(2k+1)}}{[2(2k+1)]!}$$

Lösung. Notieren dass, die Reihe $\cos x$ konvergiert. Folgendes gilt:

$$\cos x - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... - \frac{x^{2(2k+1)}}{[2(2k+1)]!}\right] = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^{4(k+l)}}{[4(k+l)]!} - \frac{x^{4(k+l)+2}}{[4(k+l)+2]!}.$$

Es gilt auch

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{4(k+l)}}{[4(k+l)]!} - \frac{x^{4(k+l)+2}}{[4(k+l)+2]!} \geq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{x^{4(k+l)}}{[4(k+l)]!} \geq \frac{x^{4(k+l)+2}}{[4(k+l)+2]!} \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{[4(k+l)]!} \geq \frac{x^2}{[4(k+l)+2]!} \qquad (\text{da } x^{4(k+l)} \geq 0) \\
\Longleftrightarrow\ &1 \geq \frac{x^2}{(4(k+l)+1)(4(k+l)+2)} \\
\Longleftrightarrow\ &x^2 \leq (4(k+l)+1)(4(k+l)+2),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung nach Annahme gilt.

Dann

$$0 \leq x \leq \sqrt{(4k+5)(4k+6)} \Longrightarrow \frac{x^{4(k+l)}}{[4(k+l)]!} - \frac{x^{4(k+l)+2}}{[4(k+l)+2]!} \geq 0 \quad \forall l \geq 1.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.