Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

## 10.1. MC Fragen.

**(a)** Definiere für $x > 0$

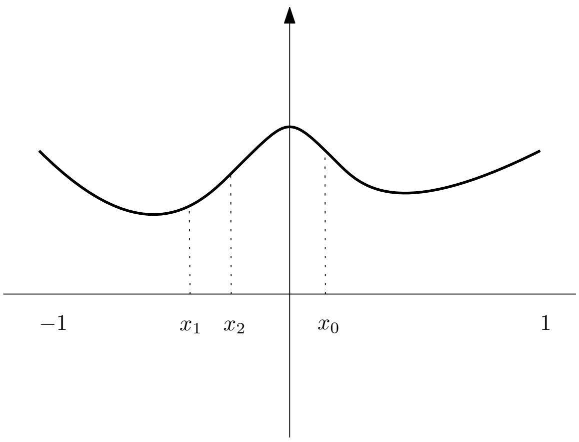
$$f(x) := \liminf_{k\to\infty} \Big(\min\{x, x^{-1}\}\Big)^k.$$

Dann

- ☐ $f$ ist stetig und differenzierbar
- ☐ $f$ ist differenzierbar, aber nicht stetig
- ☐ $f$ ist stetig, aber nicht differenzierbar
- ☑ $f$ ist nicht stetig und nicht differenzierbar

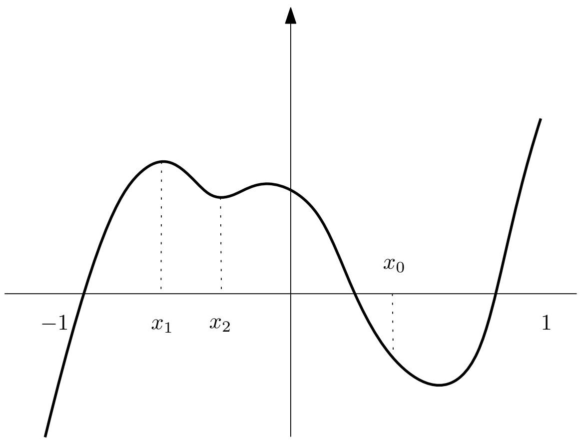
*Lösung: Da $f(x) = 0$ falls $x \neq 1$ und $f(1) = 1$ ist $f$ weder stetig noch differenzierbar.*

**(b)** Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgendem Graph




Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ☑ Die Funktion $f$ besitzt ein lokales Maximum in 0.
- ☐ $f'(x_0) > 0$.
- ☐ $f'(x_1) = 0$.
- ☐ $f'(x_2) < 0$.




**(c)** Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgendem Graph

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ☐ Die Funktion $f$ besitzt ein lokales Maximum in 0.
- ☐ $f'(x_0) > 0$.
- ☑ $f'(x_1) = 0$.
- ☐ $f'(x_2) < 0$.

**(d)** Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(t) > 0$ für alle $t \in (a,b)$. Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☐ $f$ ist positiv.
  Falsch: $f(x) = x$ auf $(-1,1)$ ist ein Gegenbeispiel.
- ☐ $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in (a,b)$ mit $x > y$.
  Falsch: $f$ ist strikt monoton wachsend, nicht fallend!
- ☐ $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in (a,b)$ mit $x \geq y$.
  Falsch: Für $x = y$ gilt stets $f(x) = f(y)$.
- ☑ $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in (a,b)$ mit $x < y$.
  Wahr.

**(e)** Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $D \subset \mathbb{R}$. Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☑ $f$ ist stetig.
  Wahr.

☐ $f'$ ist stetig.
Falsch: In Aufgabe 4b) ist $f$ ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion, deren Ableitung $f'$ nicht stetig ist.

☐ Falls $f'(x) = 0$ für alle $x \in D$ gilt, dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = c, \quad \forall x \in D.$$

Falsch: Sei $f : (-2, -1) \cup (1, 2) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-2, -1), \\ 1, & x \in (1, 2). \end{cases}$$

Dann ist $f$ auf beiden Teilintervallen konstant (also $f' = 0$), aber mit unterschiedlichem Wert.

☑ Falls $D = (a, b)$ mit $a < b$ reelle Zahlen, dann ist die dritte Aussage korrekt.
Wahr.

## *10.2. Ableitung II.

**(a)** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $x_0 \in R$ differenzierbar ist. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Berechne

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-2)h)}{h}.$$

**Lösung.** Wir berechnen zuerst, für $k \geq 1$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + kh) - f(x_0)}{h} = k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + kh) - f(x_0)}{kh} = k \cdot f'(x_0).$$

Für $k = 0$ gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + kh) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{h} = 0 = 0 \cdot f'(x_0)$$

Damit erhalten wir, für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-2)h)}{h} \\ &\quad = \lim_{h \to 0} \left( \frac{f(x_0 + nh) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 + (n-2)h) - f(x_0)}{h} \right) \\ &\quad = n \cdot f'(x_0) - (n-2) \cdot f'(x_0) \\ &\quad = 2 \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

**(b)** Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gerade* (resp. *ungerade*), falls $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zeige: falls $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dass gilt:

(i) $f$ gerade $\implies$ $f'$ ungerade.

**Lösung.** Es ist zu zeigen, dass $f'(-x) = -f'(x)$. Dies folgt aus der Definition der Ableitung und der Eigenschaft $f(-x) = f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h'\to 0} \frac{f(x+h') - f(x)}{-h'} \\ &= -\lim_{h'\to 0} \frac{f(x+h') - f(x)}{h'} \\ &= -f'(x). \end{aligned}$$

(ii) $f$ ungerade $\implies$ $f'$ gerade.

**Lösung.** der Beweis ist analog zum vorigen Teil.

***10.3. Hyperbelfunktionen** Seien $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$ und $g(x) = (e^x - e^{-x})/2$ zwei Funktionen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert sind.

**(a)** Zeigen Sie, dass $f$ und $g$ differenzierbar in $\mathbb{R}$ sind, und dass Folgendes gilt:

$$f' = g, \quad g' = f.$$

**Lösung:** Die Funktionen $e^x$ und $e^{-x}$ sind differenzierbar in $\mathbb{R}$. Linearkombinationen von differenzierbaren Funktionen sind differenzierbar, und daher sind $f$ und $g$ differenzierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((e^x + e^{-x})/2)' = (e^x + e^{-x}(-1))/2 = g(x), \\ g'(x) &= ((e^x - e^{-x})/2)' = (e^x - e^{-x}(-1))/2 = f(x). \end{aligned}$$

**(b)** Zeigen Sie, dass $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Lösung:** Aus Punkt (a) gilt es

$$(f(x)^2 - g(x)^2)' = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0.$$

Das heißt $f(x)^2 - g(x)^2$ konstant ist, und daher $f(x)^2 - g(x)^2 = f(0)^2 - g(0)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**(c)** Zeigen Sie, dass $g$ strikt monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.

**Lösung:** Aus Punkt (a) folgt, dass

$$g'(x) = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > \frac{e^x}{2} > 0,$$

da $e^y > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ist. Die Aussage folgt aus Korollar 4.2.5, Punkt (4).

**(d)** Zeigen Sie, dass Folgendes gilt

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty.$$

**Lösung:** Es gilt

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty,$$

und

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{-y} - e^{-(-y)}}{2} = -\lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{2} = -\infty.$$

**(e)** Folgern, dass $g$ eine Bijektion ist, und dass $g^{-1}$ differenzierbar mit Ableitung

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist.

**Lösung:** Punkten (c) und (d), und Korollar 4.1.12 implizieren, dass $g$ eine differenzierbar Bijektion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist. Man berechnet

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{f(g^{-1}(x))}.$$

Aus Punkt (b) folgt es, dass $f(x) = \sqrt{1 + g(x)^2}$, wobei

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + g(g^{-1}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

**(f)** Zeigen Sie, dass $g(x) > 0$ wenn $x > 0$ und $g(x) < 0$ wenn $x < 0$ ist.

**Lösung:** Die Funktion $g$ ist *strikt* monoton wachsend, und $g(0) = 0$. Insbesondere gilt es, dass $g(x) < g(0) = 0$ wenn $x < 0$ und $0 = g(0) < g(x)$ wenn $x > 0$.

**(g)** Zeigen Sie, dass $f$ strikt monoton fallend auf $]-\infty, 0]$ und strikt monoton wachsend auf $[0, +\infty[$ ist.

**Lösung:** Kombinieren Sie die Punkte (a) und (f), um das Vorzeichen der Ableitung $f'(x)$ zu bestimmen.

**(h)** Sei $f_1$ die Einschränkung der Funktion $f$ auf $[0, +\infty[$. Zeigen Sie, dass $f_1$ eine Bijektion von $[0, +\infty[$ nach $[1, +\infty[$ ist.

**Lösung:** Es gilt

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty,$$

und $f(0) = 1$. Dann, Punkt (g) impliziert, dass $f_1$ eine Bijektion von $[0, +\infty[$ nach $[1, +\infty[$ ist.

**(i)** Zeigen Sie, dass $f_1^{-1}$ differenzierbar auf $]1, +\infty[$ ist, und dass

$$(f_1^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

für alle $x > 0$.

**Lösung:** Auf Korollar 4.1.12 $f_1$ ist differenzierbar in $]0, +\infty[$ (Achtung, dies gilt nicht in 0, wo $f'(0) = 0$). Dann

$$(f_1^{-1})'(x) = \frac{1}{f_1'(f_1^{-1}(x))} = \frac{1}{g(f_1^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{f(f_1^{-1}(x))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

da

$$g(y) = \begin{cases} \sqrt{f(y)^2 - 1}, & \text{falls } y > 0, \\ -\sqrt{f(y)^2 - 1}, & \text{falls } y \leq 0. \end{cases}$$

**10.4.**

**(a)** Sei

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass $f$ in 0 nicht differenzierbar ist.

**Beweis:** Es ist hinreichend, eine Folge $(y_n)$ zu finden, die gegen 0 strebt, sodass

$$\frac{f(y_n) - f(0)}{y_n}$$

nicht konvergiert. Dafür wählen wir $y_n = \frac{2}{\pi n}$. Es gilt

$$\frac{f(y_n) - f(0)}{y_n} = \frac{y_n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{y_n} = \begin{cases} 1, & n \text{ ungerade}, \\ -1, & n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Da $y_n \to 0$, sind wir fertig. ■

**(b)** Sei

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass $f$ bei 0 differenzierbar ist und berechne $f'(0)$.

**Beweis:** Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$$

existiert. Dafür beobachten wir

$$\left| \frac{f(h)}{h} \right| = |h| \left| \sin\left(h^{-1}\right) \right| \leq |h|,$$

da $|\sin x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt

$$-|h| \leq \frac{f(h)}{h} \leq |h|.$$

Dies zeigt, dass $\frac{f(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0$. ■

**Bemerkung** Man hätte in 10.4b) auch versuchen können, $f'(x)$ für $x \neq 0$ zu berechnen, um dann $f'$ stetig zu 0 zu erweitern – dies funktioniert aber nicht:

$$f'(x) = 2x \sin\left(x^{-1}\right) - \cos\left(x^{-1}\right)$$

lässt sich nicht stetig auf $x = 0$ erweitern. Somit ist $f$ hier ein Beispiel einer differenzierbaren, aber nicht stetig differenzierbaren Funktion.