Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

11.1. MC Fragen.

(a) Welche der folgenden Implikationsketten für eine Funktion f sind richtig?

- ☑ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig.

  Richtig.

- ☐ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar.

  Falsch. Sei $f(x) = |x|$.

- ☑ $f'' > 0 \Longrightarrow f$ ist konvex.

  Richtig. Siehe Satz 4.29

- ☐ $f'' > 0 \Longrightarrow f$ ist konkav.

  Falsch. Siehe Satz 4.29

(b) Wählen Sie die richtige Aussagen.

- ☑ Falls f_n stetige Funktionen sind und falls f_n nach f gleichmässig konvergiert, dann ist f auch stetig.

  Richtig. Siehe Satz 3.33.

- ☐ Falls f_n differenzierbare Funktionen sind und falls f_n nach f gleichmässig konvergiert, dann ist f auch differenzierbar.

  Falsch. Sei

  $$f_n\colon (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2}.$$

  Dann konvergiert f_n gegen

  $$f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x|$$

  gleichmässig, aber

  $$f_n'(x) \to g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

☑ Falls f_n eine Funktionenfolge ist, wobei f_n einmal stetig differenzierbar ist für jede $n \in \mathbb{N}$ und falls sowohl (f_n) als auch (f_n') gleichmässig konvergieren mit $f_n \to f$ und $f_n' \to g$, dann ist auch f stetig differenzierbar mit $f' = g$.

Richtig. Siehe Satz 4.39.

[label=☐, align=left]

(c) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass

$$f(1/2) = 2, \quad f'(1/2) = 0, \quad f''(1/2) = -1.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

☑ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in $1/2$.

☐ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in $1/2$.

☐ Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in $1/2$.

☐ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

Lösung: Da $f'(1/2) = 0$ und die 2. Ableitung in $1/2$ negativ ist (wobei 2 gerade ist), folgt aus Korollar 4.4.7, dass f in $1/2$ ein lokales Maximum besitzt.

(d) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

☐ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.

☐ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in 0.

☑ Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in 0.

☐ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

Lösung: Da $f'(0) = f''(0) = 0$ und die 3. Ableitung in 0 ungleich 0 ist (wobei 3 ungerade ist), folgt aus Korollar 4.4.7, dass f in 0 kein lokales Extremum besitzt.

(e) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

☐ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.

☐ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in 0.

☐ Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in 0.

☑ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

Lösung: $x^4 + 2$ besitzt ein lokales Minimum in 0, $-x^4 + 2$ besitzt ein lokales Maximum in 0, $x^5 + 2$ besitzt kein lokales Extremum in 0 (jeweils aufgrund von Korollar 4.4.7), und alle diese Funktionen erfüllen die Voraussetzungen. Also sind alle Fälle möglich.

11.2. n-te Ableitung. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die n-te Ableitung für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) $f(x) = x^6 + x^5 - x^2 + 6x - 8.$
Lösung:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6x^5 + 5x^4 - 2x + 6,\\
f''(x) &= 30x^4 + 20x^3 - 2,\\
f^{(3)}(x) &= 120x^3 + 60x^2,\\
f^{(4)}(x) &= 360x^2 + 120x,\\
f^{(5)}(x) &= 720x + 120,\\
f^{(6)}(x) &= 720,\\
f^{(7)}(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Damit ist für alle $n \geq 7$

$$f^{(n)}(x) = 0.$$

(b) $g(x) = \ln x, \ x > 0.$
Lösung:

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \quad g''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad g^{(3)}(x) = 2!\,\frac{1}{x^3}, \quad g^{(4)}(x) = -3!\,\frac{1}{x^4}, \ \ldots$$

Durch vollständige Induktion erhält man die allgemeine Formel

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2+5x+6} = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3}$.
Lösung:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2}, \\ h''(x) &= 2\,\frac{1}{(x+2)^3} - 2\,\frac{1}{(x+3)^3}, \\ h^{(3)}(x) &= -6\,\frac{1}{(x+2)^4} + 6\,\frac{1}{(x+3)^4}, \ \dots \end{aligned}$$

Allgemein folgt

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n\, n! \Big[(x+2)^{-n-1} - (x+3)^{-n-1}\Big].$$

(d) $f(x) = (\sin x)^2 = \frac{1}{2}\big(1 - \cos 2x\big)$.
Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin 2x, \\ f''(x) &= 2\cos 2x, \\ f^{(3)}(x) &= -4\sin 2x, \\ f^{(4)}(x) &= -8\cos 2x, \ \dots \end{aligned}$$

Aufteilen nach der Parität von n ergibt

$$f^{(2k+1)}(x) = 2^{2k}(-1)^k\, \sin 2x, \quad f^{(2k)}(x) = 2^{2k-1}(-1)^{k+1}\, \cos 2x.$$

***11.3. a) Bestimme die lokalen Maxima und Minima von $f(x) = (\sin x)^3 + (\cos x)^3$ für $x \in \mathbb{R}$.**

Lösung. Erste Ableitung und kritische Punkte

$$f'(x) = 3\sin^2 x\cos x - 3\cos^2 x\sin x = 3\,\sin x\,\cos x\,(\sin x - \cos x).$$

Aus $f'(x) = 0$ folgen drei Fälle:

1. $\sin x = 0 \;\Rightarrow\; x = k\pi$.
2. $\cos x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
3. $\sin x = \cos x \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\Big[3\sin x\cos x\,(\sin x - \cos x)\Big] \\ &= 6\,\sin x\,\cos^2 x + 6\,\sin^2 x\,\cos x \;-\; 3\,\sin^3 x \;-\; 3\,\cos^3 x \\ &= 3\,(\sin x + \cos x)\,\Big(3\sin x\,\cos x - 1\Big). \end{aligned}$$

Vorzeichen der zweiten Ableitung an den kritischen Punkten

Wir setzen jeden der drei Fälle ein und bestimmen das Vorzeichen von $f''(x)$:

(A) $\sin x = 0$ **oder** $\cos x = 0$

- $x = 2j\pi$:
  $\sin x = 0,\ \cos x = 1 \ \Rightarrow\ f''(x) = 3(0+1)(3\cdot 0\cdot 1 - 1) = -3 < 0 \ \Rightarrow$ lokales Maximum, $f(x) = 1$.
- $x = 2j\pi + \frac{\pi}{2}$:
  $\sin x = 1,\ \cos x = 0 \ \Rightarrow\ f''(x) = 3(1+0)(3\cdot 1\cdot 0 - 1) = -3 < 0 \ \Rightarrow$ lokales Maximum, $f(x) = 1$.
- $x = 2j\pi + \pi$:
  $\sin x = 0,\ \cos x = -1 \ \Rightarrow\ f''(x) = 3(0-1)(3\cdot 0\cdot(-1) - 1) = +3 > 0 \ \Rightarrow$ lokales Minimum, $f(x) = -1$.
- $x = 2j\pi + \frac{3\pi}{2}$:
  $\sin x = -1,\ \cos x = 0 \ \Rightarrow\ f''(x) = 3(-1+0)(3\cdot(-1)\cdot 0 - 1) = +3 > 0 \ \Rightarrow$ lokales Minimum, $f(x) = -1$.

(B) $\sin x = \cos x$ **(**$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$**)**

Setze $s = \sin x = \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dann

$$3\sin x\,\cos x - 1 = 3s^2 - 1 = \tfrac{1}{2} > 0, \quad \sin x + \cos x = 2s.$$

- Für $x = 2j\pi + \frac{\pi}{4}$ ($s = +\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$):

$$f''(x) = 3(2s)\,\tfrac{1}{2} = \tfrac{3\sqrt{2}}{2} > 0 \ \Rightarrow\ lokales Minimum,\ f(x) = 2\Big(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)^3 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Für $x = 2j\pi + \frac{5\pi}{4}$ $(s = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0)$:

$$f''(x) = 3(2s)\,\tfrac{1}{2} = -\tfrac{3\sqrt{2}}{2} < 0 \;\Rightarrow\; lokalesMaximum,\; f(x) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zusammenfassung

- **Globale (und lokale) Maxima:**
  $x = 2j\pi,\; x = 2j\pi + \frac{\pi}{2},\; f(x) = 1.$
- **Globale (und lokale) Minima:**
  $x = 2j\pi + \pi,\; x = 2j\pi + \frac{3\pi}{2},\; f(x) = -1.$
- **Weitere lokale Minima:**
  $x = 2j\pi + \frac{\pi}{4},\; f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- **Weitere lokale Maxima:**
  $x = 2j\pi + \frac{5\pi}{4},\; f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

b) Bestimme die lokalen Maxima und Minima von

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt[3]{3x^3 - x^2}.$$

Lösung. Wir schreiben

$$f(x) = (3x^3 - x^2)^{1/3}$$

und verwenden die Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^3 - x^2)^{-2/3}\left(9x^2 - 2x\right) = \frac{x(9x-2)}{3\,(3x^3 - x^2)^{2/3}}.$$

- Zähler null: $x = 0$ oder $9x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{9}$.
- Nenner null: $3x^3 - x^2 = x^2(3x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \frac{1}{3}$.
  An $x = \frac{1}{3}$ existiert f' nicht (Tendenz $+\infty$).

Somit sind die kritischen Punkte

$$x = 0, \quad x = \frac{2}{9}, \quad x = \frac{1}{3}.$$

Monotonie: Da $(3x^3 - x^2)^{2/3} > 0$ für $x \neq 0, \frac{1}{3}$, bestimmt das Vorzeichen des Zählers $x(9x-2)$ das Monotonieverhalten:

$$\begin{aligned}
x < 0 :&\quad x < 0,\; 9x - 2 < 0 &&\Rightarrow && f'(x) > 0 && \text{(steigend);}\\
0 < x < \tfrac{2}{9} :&\quad x > 0,\; 9x - 2 < 0 &&\Rightarrow && f'(x) < 0 && \text{(fallend);}\\
\tfrac{2}{9} < x < \tfrac{1}{3} :&\quad x > 0,\; 9x - 2 > 0 &&\Rightarrow && f'(x) > 0 && \text{(steigend);}\\
x > \tfrac{1}{3} :&\quad x > 0,\; 9x - 2 > 0 &&\Rightarrow && f'(x) > 0 && \text{(steigend).}
\end{aligned}$$

Extremstellen:

- $x = 0$: links steigend, rechts fallend $\Rightarrow$ **lokales Maximum**,

$$f(0) = 0.$$

- $x = \frac{2}{9}$: links fallend, rechts steigend $\Rightarrow$ **lokales Minimum**,

$$f\Big(\tfrac{2}{9}\Big) = \sqrt[3]{3(\tfrac{2}{9})^3 - (\tfrac{2}{9})^2} = -\sqrt[3]{\tfrac{4}{243}}.$$

- $x = \frac{1}{3}$: f' existiert nicht (Tendenz $+\infty$), doch beide Seiten sind steigend $\Rightarrow$ *keine* Extremstelle, sondern eine **senkrechte Tangente**.

***11.4. Taylorpolynom.** Sei

$$f(x) = \ln\Big(1 + (1+x)^2\Big), \qquad x_0 = -1.$$

Bestimmen Sie:

(a) das Taylorpolynom 2. Ordnung $T_2 f(x; -1)$ und das Taylorpolynom 3. Ordnung $T_3 f(x; -1)$,

(b) mithilfe von T_2 eine Approximation von

$$f(x_0 + 0.01) = f(-0.99).$$

Lösung: Die ersten drei Ableitungen von f sind aufgrund von $\ln(x)' = \frac{1}{x}$ (Beispiel 4.1.13(1)) und der Kettenregel (Satz 4.1.11) und Quotientenregel (Satz 4.1.9(3)):

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2(1+x)}{1+(1+x)^2}, && (x \in \mathbb{R})\\
f''(x) &= \frac{2(1+(1+x)^2) - 4(1+x)^2}{(1+(1+x)^2)^2} = -\frac{2x(x+2)}{(1+(1+x)^2)^2},\\
f'''(x) &= -\frac{4(x+1)(1+(1+x)^2)^2 - 8x(x+1)(x+2)(1+(1+x)^2)}{(1+(1+x)^2)^4}\\
&= -\frac{4(x+1)(1+(1+x)^2) - 8x(x+1)(x+2)}{(1+(1+x)^2)^3}\\
&= \frac{4(x^3+3x^2-2)}{(1+(1+x)^2)^3}.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $x_0 = -1$ finden wir:

$$f(-1) = \ln(1) = 0, \qquad f''(-1) = 2,$$
$$f'(-1) = 0, \qquad f'''(-1) = 0.$$

Daher ist das Taylorpolynom von f der Ordnung 3 im Punkt $x_0 = -1$ gegeben durch:

a) **Taylorpolynome:**

$$T_2 f(x;-1) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 = (x+1)^2,$$
$$T_3 f(x;-1) = T_2 f(x;-1) + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 = (x+1)^2.$$

b) **Approximation:**

$$f(-0.99) \approx T_2 f(-0.99;-1) = (-0.99+1)^2 = 0{,}0001.$$