Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

12.1. MC Fragen.

1. In der folgenden Aufgabe sind alle Funktionen beschränkt und integrierbar. Kreuze die richtigen Aussagen an:

   ☑ Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\leq 0}$ gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$. Wahr.

   ☐ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ impliziert $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$. Falsch: Die Funktion $f(x) = x$ auf $[-1,1]$ liefert ein Gegenbeispiel.

   ☑ $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x}$. Wahr: Dies ist Cauchy–Schwarz (Satz 5.22) angewandt auf $g(x) = 1$ und $f(x)$.

   ☐ Für $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ gilt $F'(x) = f(x) + C$ für alle $x \in [a,b]$ und $C \in \mathbb{R}$. Falsch: Die Aussage ist nur korrekt für $C = 0$.

2. Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_{-2}^{2}\Big(1 + |x|\Big)\,\mathrm{d}x$ beträgt:

   ☐ 0, Falsch: Das Integral einer positiven Funktion, die nicht konstant 0 ist, ist > 0.

   ☐ 5, Falsch: Die Funktion ist gerade, daher $\int_{-2}^2 (1+|x|)dx = 2\int_0^2 (1+x)dx$, und das Ergebnis ist eine ganze Zahl, nicht 5.

   ☐ -7, Falsch: Der Integrand ist positiv, also kann das Integral nicht negativ sein.

   ☑ 8. Wahr: $\int_{-2}^2 (1+|x|)\,dx = 2\int_0^2 (1+x)\,dx = 2\Big[x + \frac{1}{2}x^2\Big]_0^2 = 2(2+2) = 8$.

3. Welche der folgenden Implikationen sind richtig:

   ☑ f differenzierbar $\Longrightarrow$ f stetig $\Longrightarrow$ f integrierbar.
   Wahr: Die erste Implikation folgt aus Korollar 4.5, die zweite aus Satz 5.16.

   ☐ f integrierbar $\Longrightarrow$ f differenzierbar $\Longrightarrow$ f stetig.
   Falsch: Treppenfunktionen sind integrierbar, aber weder differenzierbar noch stetig.

   ☐ f stetig $\Longrightarrow$ f differenzierbar $\Longrightarrow$ f integrierbar.
   Falsch: $f(x) = |x|$ ist stetig, aber nicht differenzierbar in 0.

   ☐ f integrierbar $\Longrightarrow$ f stetig $\Longrightarrow$ f differenzierbar.
   Falsch: Gleiche Argumente wie oben.

- ☐ keine.
  Falsch.

4. Welche Eigenschaft einer Funktion auf einem kompakten Intervall impliziert *nicht* die Integrierbarkeit?

   - ☑ Beschränktheit

     Richtig: Die Funktion

     $$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

     aus Beispiel 5.1.6 ist beschränkt aber nicht integrierbar.

   - ☐ Monotonie

     Falsch: Siehe Satz 5.2.8.

   - ☐ Stetigkeit

     Falsch: Siehe Satz 5.2.7.

   - ☐ Differenzierbarkeit

     Falsch: Differenzierbare Funktionen sind stetig (Korollar 4.1.5) und somit integrierbar (Satz 5.2.7).

5. Seien $a < b$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Welche der folgenden Formeln ist richtig?

   - ☐ $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

   - ☑ $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$

   - ☐ $\displaystyle\int_a^b f(g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$

   - ☐ $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(a)}^{f(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$

   Lösung: Man erhält die richtige Antwort aus der Substitutionsregel (Satz 5.4.6) mit $g = \phi$.

6. Was ist die Ableitung nach x von $G(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{1} \sin(t)^2 \cos(t)^2\,\mathrm{d}t$?

- ☐ $G'(x) = \int_{2x}^{1} \sin(t)^2 \cos(t)^2 \,\mathrm{d}t$
- ☐ $G'(x) = 2x \sin\left(x^2\right)^2 \cos\left(x^2\right)^2$
- ☐ $G'(x) = -\sin\left(x^2\right)^2 \cos\left(x^2\right)^2$
- ☑ $G'(x) = -2x \sin\left(x^2\right)^2 \cos\left(x^2\right)^2$

Lösung: Sei F eine Stammfunktion von $t \mapsto \sin(t)^2 \cos(t)^2$, d.h. $F'(t) = \sin(t)^2 \cos(t)^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Diese existiert nach dem ersten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (Satz 5.4.1). Der zweite Teil des Hauptsatzes (Satz 5.4.3) impliziert

$$G(x) = \int_{x^2}^{1} \sin(t)^2 \cos(t)^2 \,\mathrm{d}t = F(1) - F(x^2).$$

Mit der Kettenregel folgt für $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = -F'(x^2)2x = -2x \sin\left(x^2\right)^2 \cos\left(x^2\right)^2.$$

7. Der Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} |x| \, dx$ beträgt

- ☐ 0
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☑ 1
- ☐ 2

Lösung. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\int_a^b x \, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |x| \, dx &= \int_{-1}^{0} (-x) \, dx + \int_{0}^{1} x \, dx = -\int_{-1}^{0} x \, dx + \int_{0}^{1} x \, dx \\ &= -\frac{1}{2}\left(0^2 - (-1)^2\right) + \frac{1}{2}\left(1^2 - 0^2\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

8. Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wählen Sie die richtige Aussagen:

- ☐ f ist immer integrierbar.

  Falsch. Die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

  ist nicht integrierbar.

☑ Falls f monoton ist, ist f auch integreirbar.

Richtig. Siehe Satz 5.17.

☐ Falls f beschränkt ist, ist f auch integrierbar.

Falsch. Siehe Gegenbeispiel oben.

☑ Falls f stetig ist, ist f auch integrierbar.

Richtig. Siehe Satz 5.16.

9. Ist die folgende Aussage wahr?

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gibt es $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

☐ Ja

☑ Nein

Lösung. Ein Gegenbeispiel ist:

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Für Details, siehe Beispiel 5.24.

*12.2. Stammfunktionen

(a) Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $[c,d] \subseteq f([a,b])$. Zeigen Sie, dass

$$x \longmapsto f'\big(g(x)\big)\, g'(x), \quad x \in [c,d],$$

eine Stammfunktion besitzt und geben Sie diese an.

(b) Finden Sie zu den folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion:

(b) $(x^2+2x+5)^{2025}\,(x+1)$,

(c) $\dfrac{2x}{(x^2+5)^{3/2}}$,

(d) $\cot x$,

(e) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, f beliebig differenzierbar,

(f) $2x\,e^{x^2+1}$.

Lösung.

(a) Durch die Kettenregel $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$ folgt sofort, dass

$$F(x) = (f \circ g)(x)$$

eine Stammfunktion von $x \mapsto f'(g(x))g'(x)$ ist.

(b) Mit der Substitution

$$u = x^2 + 2x + 5, \quad du = (2x+2)\, dx, \quad x + 1 = \frac{u'}{2},$$

erhält man

$$\int (x^2+2x+5)^{2025}(x+1)\, dx = \frac{1}{2}\int u^{2025}\, du = \frac{u^{2026}}{2 \cdot 2026} = \frac{(x^2+2x+5)^{2026}}{2026}.$$

(c) Setze $u = x^2 + 5$, dann $du = 2x\, dx$, also

$$\int \frac{2x}{(x^2+5)^{3/2}}\, dx = \int u^{-3/2}\, du = -2\, u^{-1/2} = -\frac{2}{\sqrt{x^2+5}}.$$

(d) Da $\dfrac{d}{dx} \ln|\sin x| = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$, ist

$$\int \cot x\, dx = \ln\big|\sin x\big|.$$

(e) Allgemein gilt $\big(\ln|f(x)|\big)' = f'(x)/f(x)$, somit

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln\big|f(x)\big|.$$

(f) Mit $u = x^2 + 1$, $du = 2x\, dx$ folgt

$$\int 2x\, e^{x^2+1}\, dx = \int e^u\, du = e^u = e^{x^2+1}.$$

12.3. Integration I. Für zwei ganze Zahlen $p, q \geq 0$ definieren wir

$$I(p,q) := \int_0^1 x^p\,(1-x)^q\, dx\,.$$

Zeigen Sie, dass

$$I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$$

Hinweis: Bestimmen Sie mit Hilfe einer partiellen Integration eine Rekursionsrelation zwischen den Grössen $I(p+1,q)$ und $I(p,q+1)$ und berechnen Sie $I(p,0)$.

Lösung. Mit einer partiellen Integration erhalten wir

$$I(p+1,q) = \int_0^1 x^{p+1}\,(1-x)^q\,dx$$

$$= -x^{p+1}\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{p+1}{q+1}\int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}\,dx = \frac{p+1}{q+1}\,I(p,q+1)$$

Es folgt

$$I\left(p,q+1\right) = \frac{q+1}{p+1} I\left(p+1,q\right) \qquad (1)$$

Weiter gilt

$$I(p,0) = \int_0^1 x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{p+1} \qquad (2)$$

Somit folgt

$$I(p,q) \overset{(1)}{=} \tfrac{q}{p+1}\,I(p+1,q-1) \overset{(1)}{=} \tfrac{q}{p+1}\cdot\tfrac{q-1}{p+2}\,I(p+2,q-2) \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)\cdots(p+q)}\,I(p+q,0) \overset{(2)}{=} \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)\cdots(p+q+1)}$$

$$= \frac{q!}{(p+1)\cdots(p+q+1)} = \underbrace{\frac{p!}{1\cdot 2\cdots(p-1)p}}_{=1}\cdot\frac{q!}{(p+1)\cdots(p+q+1)} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$$

12.4. Integration II. Berechnen Sie folgende bestimmte oder unbestimmte Integrale:

***(a)** $\displaystyle\int_1^7 \frac{8-x^3+x^2}{x}\,\mathrm{d}x$; **(b)** $\displaystyle\int_1^2 (x^{1/3}+x+1)\,(x^2+1)\,\mathrm{d}x$;

***(c)** $\displaystyle\int \sin(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x$; ***(d)** $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\sin(2t)\,\mathrm{d}t$;

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Lösung.

(a)

$$\begin{aligned}\int_1^7 \frac{8-x^3+x^2}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^7 \Big(8x^{-1}-x^2+x\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= \Big[8\ln|x| - \tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^2}{2}\Big]_1^7\\ &= \Big(8\ln 7-\tfrac{343}{3}+\tfrac{49}{2}\Big)-\Big(0-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}\Big)\\ &= 8\ln 7 \;-\; 90.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^{1/3}+x+1)(x^2+1)\,\mathrm{d}x &= \Big[\tfrac{x^4}{4}+\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^2}{2}+x+\tfrac{3}{10}x^{10/3}+\tfrac{3}{4}x^{4/3}\Big]_1^2\\ &= \Big(4+\tfrac{8}{3}+2+2+\tfrac{3}{10}\,2^{10/3}+\tfrac{3}{4}\,2^{4/3}\Big)\\ &\quad-\Big(\tfrac14+\tfrac13+\tfrac12+1+\tfrac{3}{10}+\tfrac34\Big)\\ &= \frac{32}{3}-\frac{47}{15}+\frac{39}{10}\,2^{1/3}\\ &= \frac{113}{15}+\frac{39}{10}\sqrt[3]{2}.\end{aligned}$$

(c)

$$\int \sin(\sin x)\,\cos x\,\mathrm{d}x = \int \sin u\,\mathrm{d}u \quad (u=\sin x) = -\cos u + C = -\cos\Big(\sin x\Big)+C.$$

(d)

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2\,\sin(2t)\,\mathrm{d}t &= \Big[-\tfrac12\,t^2\cos(2t)\Big]_0^1 + \int_0^1 t\,\cos(2t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\tfrac12\cos 2 + \Big[\tfrac12\,t\sin(2t)+\tfrac14\cos(2t)\Big]_0^1\\ &= -\tfrac12\cos 2+\tfrac12\sin 2+\tfrac14\cos 2 = \tfrac12\sin 2-\tfrac14\cos 2-\tfrac14.\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\tan^2 x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\Big[\tan x - x\Big]_0^{\pi/4} = \tfrac{1}{2}\Big(1-\tfrac{\pi}{4}\Big) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\pi}{8}.\end{aligned}$$