

Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

9.1. MC Fragen: Folgen und Reihen. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Seien (a_n) und (b_n) zwei reellen Folgen. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ Die Folge (b_n) ist konvergent, falls $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und (a_n) konvergent ist. ⚡: $a_n = 1/n$ und $b_n = n$.
- ☐ Beiden Folgen (a_n) und (b_n) sind konvergent, falls $|a_n - b_n| < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ⚡: $a_n = b_n = n$.
- ☐ Die Folge (b_n) ist konvergent, falls (b_n^2) konvergent ist. ⚡: $b_n = (-1)^n$.
- ☒ Die Folge (b_n) konvergiert gegen 0, falls $0 \leq b_n \leq a_n^3$ und (a_n) konvergent gegen 0 ist.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Seit (a_n) konvergent ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n| < (\varepsilon/2)^{1/3}$, wenn $n \geq N$. Dann,

$$-a_n^3 \leq b_n - a_n^3 \leq 0,$$

impliziert, dass

$$|b_n| = |b_n - a_n^3 + a_n^3| \leq |b_n - a_n^3| + |a_n^3| \leq 2|a_n|^3 < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

(b) Sei (a_n) eine reelle Folge so, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ Die Folge (a_n) ist konvergent, falls (a_n) monotone ist. ⚡: $a_n = n$.
- ☐ $\liminf a_n < \limsup a_n$, falls (a_n) beschränkt ist. ⚡: $a_n = 1$.
- ☐ Die Folge (a_n) ist konvergent, falls (a_n) streng monoton wachsend ist. ⚡: $a_n = n$.
- ☒ $\liminf a_n \geq 0$, falls (a_n) beschränkt ist.

Lösung: Sei $b_n := \inf\{a_k : k \geq n\}$. Dann, ist die Folge (b_n) auch positive und beschränkt. Das heißt: $\exists M > 0, \forall n, 0 < a_n, b_n < M$. Es folgt dann: $\liminf a_n = \lim b_n \in [0, M]$.

(c) Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an dass $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$.

- ✓ Es ist möglich dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -2$

Lösung: Sei $f(x) = 2x, g(x) = -x$

- Es ist möglich dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Lösung: Angenommen,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Dann gibt es $c > 0$, so dass für $x > c$

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 1.$$

Insbesondere ist $\frac{f(x)}{g(x)}$ positiv falls x gross genug ist. Andererseits gilt für $x \rightarrow \infty$, dass

$$f(x) \rightarrow +\infty$$

und

$$g(x) \rightarrow -\infty$$

und daher $f(x) > 0$ und $g(x) < 0$ für genügend grosse x . Damit wäre jedoch

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

negativ: Widerspruch.

- ✓ Es ist möglich dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

Lösung: Sei $f(x) = x^2, g(x) = -x$

(d) Welche der folgenden Aussagen gilt?

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 0$

Lösung:

Leider falsch. $\lim n^{1/n} = 1$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/(2n)} = \infty$

Lösung: Leider falsch. Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ folgt unter Verwendung der Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/(2n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{1/n} \right)^{1/2} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} \right)^{1/2} = 1^{1/2} = 1.$$

□ $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{1/(2n)} + n^{2/n}) = 1.$

Lösung: Leider falsch. Es gilt gemäß den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{1/(2n)} + n^{2/n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/(2n)} + \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2/n}.$$

Aus der vorherigen Teilaufgabe wissen wir $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/(2n)} = 1$ und weiter ist mit den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{1/n})^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} \right)^2 = 1^2 = 1.$$

✓ $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/(3n)} (1 - n^{2/(3n)}) = 0$

Lösung: Richtig! Es gilt für jedes reelle a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{a/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{1/n})^a = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} \right)^a = 1^a = 1$$

und folglich mit den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/(3n)} (1 - n^{2/(3n)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/(3n)} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - n^{2/(3n)}) = 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

9.2. Grenzwerten Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(n^3+2)/(n^3-6)}$

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/n}}{e^{n^2/(n^2+1)} + 3}$

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n!}{(n!)^{2+1}}.$

Lösung: (a) Sei $a_n = \frac{n^3+2}{n^3-6}$ für alle $n \geq 2$. Diese Folge ist wohldefiniert weil $n^3 - 6 > 0$ für alle $n \geq 2$. Dann es gilt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3+2}{n^3-6} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{8}{n^3-6} \right) = 1.$$

Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion und Satz 3.2.4 folgendes gilt:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(n^3+2)/(n^3-6)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{a_n} = e^1 = e.$$

(b) Sei

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{1/(1+x^2)} + 3},$$

sodass

$$f(1/n) = \frac{e^{1/n}}{e^{1/(1+1/n^2)} + 3} = \frac{e^{1/n}}{e^{n^2/(n^2+1)} + 3}.$$

Dann $f(x)$ ist eine stetige Funktion, und darauf

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/n}}{e^{n^2/(n^2+1)} + 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(1/n) = f(0) = \frac{1}{e + 3}.$$

(c)

$$0 < \frac{2n!}{(n!)^2 + 1} \leq \frac{2n!}{(n!)^2} = \frac{2}{n!} \leq \frac{2}{n}$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$, aus der Sandwichsatz folgt dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n!}{(n!)^2 + 1} = 0$

9.3. ★ Wurzelkriterium Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und ganze Zahl $n \geq 1$ existiert eine einzige Zahl y , sodass $y^n = x$ ist. Wir bezeichnen $y = \sqrt[n]{x}$.

Sei (x_n) eine komplexe Folge, sodass die Folge $(\sqrt[n]{|x_n|})$ gegen $\ell \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ absolut konvergent ist, falls $\ell < 1$ ist.

Lösung: Die Folge $\sqrt[n]{|x_n|}$ gegen ℓ konvergiert. Sei $\epsilon = (1 - \ell)/2$. Dann gibt es $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|\sqrt[n]{|x_n|} - \ell| < (1 - \ell)/2, \quad \forall n \geq N_0.$$

Dann gilt $\sqrt[n]{|x_n|} < \ell + (\ell - 1)/2 = (3\ell - 1)/2 = q$, woraus

$$|x_n| < q^n, \quad \forall n \geq N_0$$

folgt. Da $q < 1$ folgt aus dem Vergleichssatz 2.43, dass die Reihe absolut konvergent ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergent ist, falls $\ell > 1$ ist.

Lösung: Die Folge $\sqrt[n]{|x_n|}$ gegen ℓ konvergiert. Sei $\epsilon = (\ell - 1)/2$. Dann gibt es $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|\sqrt[n]{|x_n|} - \ell| < (\ell - 1)/2, \quad \forall n \geq N_0.$$

Dann gilt $\sqrt[n]{|x_n|} > \ell - (\ell - 1)/2 = (\ell + 1)/2 =: p$, woraus

$$|x_n| > p^n, \quad \forall n \geq N_0$$

folgt. Da $p > 1$ die Folge divergent ist.

9.4. Konvergenz oder Divergenz

Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren. Berechnen Sie den Grenzwert, falls die Reihe konvergiert.

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2^n)}{e^n}$$

Solution.

(a) *Die Reihe konvergiert:* Wir können abschätzen:

$$\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$$

und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$.

Der Grenzwert: Wir wollen die Partialsummen berechnen. Beachte, dass der Nenner umgeschrieben werden kann als

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n).$$

Ausserdem ist

$$\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{n}{(n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n)} = \frac{1/2}{(n^2 + 1 - n)} - \frac{1/2}{(n^2 + 1 + n)}.$$

Wenn wir $a_n = \frac{1/2}{(n^2 + 1 - n)}$ setzen, ist

$$\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = a_n - a_{n+1}$$

Darum ist die Partialsumme

$$\sum_{n=0}^N \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \sum_{n=0}^N a_n - a_{n+1} = a_0 - a_{N+1} = \frac{1}{2} - \frac{1/2}{(N^2 + 1 + N)}.$$

Im Grenzwert $N \rightarrow \infty$ bekommen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

(b) Wir schreiben zuerst um:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2^n)}{e^n} = \log(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}.$$

Die letztere Reihe konvergiert: Der Quotient der Glieder der Folge gegeben durch $a_n = \frac{n}{e^n}$ ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{e^{n+1}} \frac{e^n}{n} = \frac{n+1}{en},$$

welcher Grenzwert $\frac{1}{e} < 1$ hat. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$.

Der Grenzwert: Wir setzen $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$. Dann haben wir

$$eS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{e^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n} = S + \frac{1}{1 - \frac{1}{e}}.$$

Also ist $(e-1)S = \frac{e}{e-1}$. Wir schliessen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2^n)}{e^n} = \frac{\log(2)e}{(e-1)^2}.$$

9.5. Konvergenz – II

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^5 + n^3 - 1}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-5}$

Solution.

(a) Wegen

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

ist die Folge $a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ keine Nullfolge. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

konvergiert also nicht.

(b) Mit $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$ ist

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3^{n+1}(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{3^n n! / n^n} \\ &= 3(n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= 3 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{e} > 1. \end{aligned}$$

Gemäß dem **Quotientenkriterium** ist die Reihe also nicht konvergent.

(c) Für jede natürliche Zahl n gilt $(n+1)^{\frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{n}$ und $n^5 + n^3 - 1 \geq n^5$. Folglich ergibt sich die Abschätzung

$$\frac{(n+1)^{\frac{1}{2}}}{(n^5 + n^3 - 1)^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{(n+1)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{5}{3}}} \leq \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{5}{3}}} = \frac{2}{n^{\frac{7}{6}}}.$$

Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ eine konvergente Majorante. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert genau dann, wenn $s > 1$ ist – im vorliegenden Fall ist $s = \frac{7}{6}$.) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^5 + n^3 - 1}}$$

ist dem **Majorantenkriterium** zufolge konvergent.

(d) Betrachte

$$a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-5}, \quad n \geq 1.$$

Wir wenden das Wurzelkriterium an. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\frac{n-5}{n}} = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{1-\frac{5}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

Da $\frac{1}{2} < 1$, konvergiert die Reihe absolut und damit auch konvergent.

9.6. Konvergenzradius von Potenzreihen – I Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k z^k.$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} z^k.$

Solution.

(a) Es gilt für $a_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k$:

$$\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^k}{\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

Da der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$ existiert, ist dies gemäß der Vorlesung gerade der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Bemerkung: Der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$ braucht nicht immer zu existieren. In jedem Fall kann der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit der Cauchy-Hadamardschen Formel

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

bestimmt werden. Wegen $\sqrt[k]{\left|\left(\frac{1}{3}\right)^k\right|} = \sqrt[k]{\left(\frac{1}{3}\right)^k} = \frac{1}{3}$ beträgt der Konvergenzradius

der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k z^k$ also

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = 3.$$

(b) Es gilt für $a_k = k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{(k^2)}$:

$$\begin{aligned} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} &= \frac{k}{k+1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{(k+1)^2} \\ &= \frac{k}{k+1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2+2k+1} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{2k+1} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{(k+1)^2} \\ &= \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \left(\frac{k}{k+1}\right)^{2k} \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)^{(k+1)^2} \\ &= \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}\right)^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)^{(k+1)^2}} \end{aligned}$$

Für $k \rightarrow \infty$ konvergiert der erste Term

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-2} \rightarrow 1.$$

Gemäss der Liste aller speziellen Grenzwerte gilt, für $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Für $x = 1$, folgt nun $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$. Ferner gilt somit auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}\right)^2 = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}\right)^2 = \left(\frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{e^2}.$$

Mit dem selben Argument, diesmal für $x = -1$, ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

und somit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)^{(k+1)^2}} \stackrel{n=(k+1)^2}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e.$$

Die Faktoren in der letzten Zeile der obigen Rechnung konvergieren folglich gegen 1, $\frac{1}{e^2}$ und $\frac{1}{e} = e$. Insgesamt konvergiert also $\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$ für $k \rightarrow \infty$ gegen deren Produkt, $\frac{1}{e^2} e = \frac{1}{e}$. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ lautet also $\frac{1}{e}$.

Bemerkung: Der Vollständigkeit halber noch die Lösung basierend auf der Formel von Cauchy-Hadamard: Wegen

$$\sqrt[k]{\left|k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}\right|} = \sqrt[k]{k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}} = \underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} e} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e$$

lautet der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{(k^2)} z^k$

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{e}.$$

9.7. Reihen und Potenzreihen

- a) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$.
- b) Konvergiert die folgende Reihe? Konvergiert sie absolut?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Nennen Sie die Konvergenzsätze mit Namen, die Sie verwenden.

- c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$x + 4x^4 + 9x^9 + 16x^{16} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n^2}.$$

Falls Sie dabei ein Resultat über Konvergenzradien aus der Vorlesung benutzen, so schreiben Sie die vollständige Aussage dieses Resultats auf.

Solution.

- (a) Wir bemerken zunächst, dass $4k^2 - 1 = (2k - 1)(2k + 1)$. Mit Partialbruchzerlegung oder raten erhalten wir, dass

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right).$$

Wir betrachten die Partialsummen

$$\begin{aligned}s_n &:= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right),\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit daraus folgt, dass wir eine Teleskopsumme erhalten. Nun betrachten wir den Limes $n \rightarrow \infty$ der Partialsummen und erhalten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{2},$$

was zu zeigen war.

- (b) Sie *konvergiert nach dem Leibnizkriterium*, da $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ monoton fallend ist und gegen Null strebt. Sie *konvergiert aber nicht absolut*, da

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Die harmonische Reihe konvergiert nicht. Nach dem Majorantenkriterium, divergiert darum auch

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}.$$

- (c) Hier sind die Koeffizienten der Reihe

$$a_n = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ ein Quadrat ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

somit ist der Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = 1.$$