1 Multiple Choice

(a) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

○ Jede beschränkte und nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Maximum in $\mathbb{R}$.

● Jede beschränkte und nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum in $\mathbb{R}$.

○ Jede beschränkte und nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat eine kleinste untere Schranke in $\mathbb{R}$.

○ Jede beschränkte und nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{Q}$ hat ein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Lösung: Dies ist eine direkte Konsequenz der Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen: jede nicht-leere, beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat sowohl ein Supremum (kleinste obere Schranke) als auch ein Infimum (grösste untere Schranke) in $\mathbb{R}$ (Satz 1.1.15).

Im Gegensatz dazu sind die anderen Optionen falsch. Nicht jede beschränkte Menge hat ein Maximum (man denke an offene Intervalle), und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ nicht vollständig, sodass eine beschränkte Menge in $\mathbb{Q}$ möglicherweise kein Supremum in $\mathbb{Q}$ hat. Keine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ kann eine kleinste untere Schranke in $\mathbb{R}$ besitzen, da für eine untere Schranke jede noch kleinere reelle Zahl auch eine untere Schranke ist.

(b) Sei $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}$. Was ist das Supremum von S?

○ ∞

○ $\sqrt{2}$

● $\sqrt{3}$

○ Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.

Lösung: Die Menge $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}$ beschreibt alle reellen Zahlen, deren Quadrat kleiner als 3 ist. Es ist also $S = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ein offenes Intervall. Da das Supremum eines nach oben beschränkten Intervalls genau der rechte Endpunkt ist, folgt $\sup(S) = \sqrt{3}$.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist eine Konsequenz der Vollständigkeit der reellen Zahlen?

○ Jedes offene Intervall in $\mathbb{R}$ enthält unendlich viele rationale Zahlen.

○ Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat endlich viele Häufungspunkte.

● Jede beschränkte monotone Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert in $\mathbb{R}$.

○ Jede Folge in $\mathbb{R}$ hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $\mathbb{R}$.

Lösung: Die Vollständigkeit der reellen Zahlen impliziert, dass jede beschränkte monotone Folge in $\mathbb{R}$ einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ besitzt. In der Tat konvergiert nach dem Satz von Weierstrass (Satz 2.2.2) jede solche Folge entweder gegen ihr Supremum (falls monoton steigend) oder gegen ihr Infimum (falls monoton fallend).

Im Gegensatz dazu sind die anderen Optionen falsch. Die Folge gegeben durch $a_n = n$ hat keine Teilfolge, die in $\mathbb{R}$ konvergiert. Betrachtet man als Folge eine Abzählung aller rationalen Zahlen in $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, dann ist die Menge der Häufungspunkte dieser Folge das gesamte Intervall $[0, 1]$. Letztlich: da auch jedes "offene rationale Intervall" der Form $\{q \in \mathbb{Q} \mid a < q < b\}$ für rationale Zahlen $a < b$ unendlich ist, kann die Aussage, dass es in jedem nicht-leeren offenen Intervall in $\mathbb{R}$ unendlich viele rationale Zahlen gibt, nicht auf die Vollständigkeit der reellen Zahlen zurückzuführen sein. (Diese Antwortmöglichkeit ist aus formellen Gründen zusätzlich auch deswegen falsch, weil ein offenes Intervall die leere Menge sein könnte.)

(d) Welche der folgenden Aussagen beschreibt das Intervallschachtelungsprinzip?

○ Der Durchschnitt jeder Folge nicht-leerer abgeschlossener Intervalle ist nicht leer.

● Der Durchschnitt jeder monoton fallenden Folge nicht-leerer kompakter Intervalle ist nicht leer.

○ Die Vereinigung jeder monoton wachsenden Folge nicht-leerer abgeschlossener Intervalle ist ein abgeschlossenes Intervall.

○ Die Vereinigung jeder Folge abgeschlossener Intervalle ist nicht leer.

Lösung: Das Intervallschachtelungsprinzip ist der Satz von Cauchy–Cantor (Satz 2.5.5). Es besagt, dass der Durchschnitt einer Folge von abgeschlossenen und beschränkten (also kompakten) Intervallen, bei der jedes Intervall im vorherigen enthalten ist (monoton fallend), nicht leer ist.

Die anderen Aussagen sind entweder falsch oder beschreiben nicht das Intervallschachtelungsprinzip.

(e) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen, deren Realteile und Imaginärteile Cauchy-Folgen bilden. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

● Die Folge der Beträge $(|a_n|)_{n\geq 1}$ konvergiert in $\mathbb{R}$.

○ Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert nicht in $\mathbb{C}$.

○ Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen ∞.

○ Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.

Lösung: Da die Real- und Imaginärteile von $(a_n)_{n\geq 1}$ jeweils Cauchy-Folgen sind, konvergieren sie in $\mathbb{R}$ (Satz 2.4.2). Da $|a_n| = \sqrt{(\mathrm{Re}(a_n))^2 + (\mathrm{Im}(a_n))^2}$ folgt, dass die Folge der Beträge $(|a_n|)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$ ebenfalls konvergiert.

Da aus der Konvergenz der Real- und Imaginärteile auch folgt, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{C}$ konvergiert (Satz 2.6.3), sind die anderen Antwortmöglichkeiten nicht korrekt.

(f) Sei $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Was ist der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ für $n \to \infty$?

- ○ 1
- ○ e
- ● $1/e$
- ○ 0

Lösung: Nach Satz 2.1.8 und Beispiel 2.2.6 gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}\\ &= \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}}_{=\frac{1}{e}}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}}_{=1} = 1/e\end{aligned}$$

Alternativ kann man in Korollar 2.7.29 den Wert $z = -1$ einsetzen.

(g) Für die Reihe $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ impliziert das Wurzelkriterium, dass die Reihe...

- ○ absolut konvergiert.
- ○ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.
- ○ divergiert.
- ● Das Wurzelkriterium erlaubt keinen Schluss über die Konvergenz oder Divergenz dieser Reihe.

Lösung: Das Wurzelkriterium (Satz 2.7.20) betrachtet den Grenzwert $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. Für die gegebene Reihe ist $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Die Berechnung des Grenzwerts liefert $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Da das Wurzelkriterium nur in den Fällen > 1 oder < 1 eine Aussage macht, ist die korrekte Antwort, dass das Wurzelkriterium keinen Schluss über die Konvergenz oder Divergenz dieser Reihe erlaubt.

(h) Das Cauchy-Produkt der Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ mit sich selbst ist die Reihe...

- ◯ $\sum_{n\geq 0} a_n^2$
- ◯ $\sum_{n\geq 0} na_n^2$
- ◯ $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_n^2$
- ● Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.

Lösung: Gemäss Definition 2.7.24 ist das Cauchy-Produkt der Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ mit sich selbst:

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}a_j\right).$$

Diese Form ist keine der angegebenen Optionen. In der Tat tauchen in den Optionen nur Quadrate von Summanden a_n auf, aber keine Produkte von Summanden der Form $a_{n-j}a_j$ mit unterschiedlichen Indizes. Daher ist die richtige Antwort: 'Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.'

(i) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ◯ Wenn f streng monoton wachsend ist, dann ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar.
- ◯ Wenn f beschränkt und differenzierbar ist, dann ist auch f' beschränkt.
- ◯ Wenn f differenzierbar und f' beschränkt ist, dann ist auch f beschränkt.
- ● Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.

Lösung: Wir liefern Gegenbeispiele:

- $f_0(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0, \\ 2x, & \text{wenn } x < 0. \end{cases}$
- $f_1(x) = \sin(x^2)$, sodass $f_1'(x) = 2x\cos(x^2)$.
- $f_2(x) = x$, sodass $f_2'(x) = 1$

Daher ist die richtige Antwort: 'Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.'

(j) Sei $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f_n(x) = \varphi(x)^n$ für $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}^*$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ◯ Wenn $|\varphi(x)| \geq 1$ für alle $x \in [0,1]$, dann konvergiert $(f_n)_n$ punktweise in $[0,1]$ gegen eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.
- ◯ Wenn φ beschränkt ist, dann konvergiert $(f_n)_n$ gleichmässig in $[0,1]$ gegen eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

- ● Wenn $|\varphi(x)| < 1$ für alle $x \in [0,1]$, dann konvergiert $(f_n)_n$ gleichmässig in $[0,1]$ gegen die konstante Nullfunktion.
- ○ Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.

Lösung: Wenn $|\varphi(x)| < 1$ für alle $x \in [0,1]$, dann gibt es eine Konstante $0 \leq c < 1$, sodass $|\varphi(x)| < 1$ für alle $x \in [0,1]$. In der Tat, dies folgt daraus, dass die stetige Funktion $|\varphi|$ gemäss dem Max-Min-Satz (Satz 3.4.5) auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ ihr Maximum annehmen muss, und dieses Maximum ist c. Es gilt also $|\varphi(x)^n| \leq c^n$ für alle $n \geq 1$ und alle $x \in [0,1]$, und damit konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gleichmässig in $[0,1]$ gegen die konstante Nullfunktion.

Die anderen Antwortmöglichkeiten sind falsch, da aus $|\varphi(x)| \geq 1$ oder der Beschränktheit von φ keinerlei Konvergenzeigenschaften von $f_n(x) = \varphi(x)^n$ abgeleitet werden können.

(k) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion, und sei $D \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Punkte, in welchen f unstetig ist. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ○ D ist immer die leere Menge.
- ○ D muss nicht die leere Menge sein, aber D ist immer endlich.
- ● D kann unendlich viele Punkte enthalten, aber D ist immer abzählbar.
- ○ D kann überabzählbar viele Punkte enthalten.

Lösung: Eine monoton wachsende Funktion kann unendlich viele Unstetigkeitsstellen haben. Man denke an die Abrundungsfunktion $f(x) = \lfloor x \rfloor$, welche in jedem ganzzahligen Punkt unstetig ist. Eine monoton wachsende Funktion kann allerdings nicht überabzählbar viele Unstetigkeitsstellen haben. In der Tat, wenn x_0 eine Unstetigkeitsstelle ist, dann existieren aufgrund der Monotonie von f die einseitigen Grenzwerte $\alpha(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ und $\beta(x_0) := \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Die Unstetigkeit in x_0 impliziert, dass $\alpha(x_0) < \beta(x_0)$. Wir können jeder Unstetigkeitsstelle x_0 von f also eine rationale Zahl $q(x_0) \in (\alpha(x_0), \beta(x_0)) \cap \mathbb{Q}$ zuordnen, und diese Zuordnung $x_0 \mapsto q(x_0)$ ergibt eine *injektive* Abbildung von der Menge D der Unstetigkeitsstellen nach $\mathbb{Q}$. Dies beweist die Abzählbarkeit von D.

(l) Für welchen Wert von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion $f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 = 0$?

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1 + (x-\alpha)(x+\alpha), & \text{wenn } x \geq 0, \\ 2 + 2\alpha x, & \text{wenn } x < 0. \end{cases}$$

- ○ 0
- ○ 1

○ -1

● Es existiert kein solches $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösung: Um die Stetigkeit von f_α in $x_0 = 0$ zu gewährleisten, müssen die beiden Funktionsstücke, aus denen f_α zusammengesetzt ist, in $x_0 = 0$ denselben Funktionswert liefern. Setzt man $x_0 = 0$ in beide Funktionsstücke ein, erhält man auf der rechten Seite $1 - \alpha^2$ und auf der linken Seite 2. Für die Gleichheit müsste also $\alpha^2 = -1$ gelten, was für eine reelle Zahl α nicht möglich ist. Somit existiert kein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass f_α in $x_0 = 0$ stetig ist.

(m) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $1 - x^2 = \exp(x - 1)$ in der Variablen x im Intervall $[0, 1]$?

○ 0

● 1

○ 2

○ unendlich viele

Lösung: Betrachtet man die Funktion $f(x) = 1 - x^2 - e^{x-1}$ auf dem Intervall $[0, 1]$, so ist $f(0) = 1 - \exp(-1) > 0$ und $f(1) = -1 < 0$. Da f stetig ist, garantiert der Zwischenwertsatz (Satz 3.3.1), dass es eine Nullstelle von f im Intervall $[0, 1]$ gibt, also eine Lösung der Gleichung $1 - x^2 = \exp(x - 1)$. Da in $[0, 1]$ die Funktion $1 - x^2$ streng monoton fallend und die Funktion e^{x-1} streng monoton steigend ist, gibt es höchstens einen Schnittpunkt dieser Funktion in $[0, 1]$, also höchstens eine Lösung der Gleichung.

(n) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und differenzierbar, und sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 = f(x_0)$. Welche der folgenden Aussagen stimmt ***nicht***?

● Es muss $f'(x_0) \neq 0$ gelten und f^{-1} ist in y_0 differenzierbar.

○ Wenn $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f^{-1} in y_0 differenzierbar.

○ Wenn f^{-1} in y_0 differenzierbar ist, dann ist $f'(x_0) \neq 0$.

○ Wenn f^{-1} in y_0 differenzierbar ist, dann ist $(f^{-1})'(y_0) \neq 0$.

Lösung: Die erste Aussage ist falsch. Z.B. erfüllt die Funktion $f(x) = x^3$ die Annahmen, aber mit $x_0 = y_0 = 0$ gilt $f'(x_0) = 0$ und die Umkehrfunktion f^{-1} ist in y_0 nicht differenzierbar.

Die zweite Antwortmöglichkeit ist richtig (Korollar 4.1.12 und die Bemerkung in der Vorlesung über die automatische Stetigkeit der Umkehrfunktion). Dass die dritte und vierte Antwortmöglichkeit richtig sind, folgt aus der Kettenregel: Unter der

Voraussetzung der Differenzierbarkeit von f^{-1} in y_0 gilt $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und durch Differenzieren beider Seiten folgt $(f^{-1})'(y_0) \cdot f'(x_0) = 1$.

(o) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und sei $x_0 \in (a,b)$. Wir betrachten das Taylorpolynom

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

der Ordnung n von f in x_0. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ○ Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $\lim_{n\to\infty} T_n f(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$.
- ● Für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^{(m)}(x_0) = (T_n f)^{(m)}(x_0)$.
- ○ Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $\lim_{n\to\infty} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} T_n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$.
- ○ Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.

Lösung: Das Taylorpolynom $T_n f(x)$ approximiert die Funktion f an der Stelle x_0 bis zur Ableitung der Ordnung n. Insbesondere gilt, dass die Ableitungen des Taylorpolynoms $T_n f$ bis zur Ordnung n an der Stelle x_0 mit den entsprechenden Ableitungen der Funktion f übereinstimmen, d.h. $f^{(m)}(x_0) = (T_n f)^{(m)}(x_0)$ für alle $m \leq n$.

Die folgende Funktion aus Beispiel 4.4.4, die auch in der Vorlesung nach einer Clicker-Frage gezeigt wurde, ist ein Gegenbeispiel zu den anderen Optionen (wähle $x_0 = 0$ und z.B. $a = -1$, $b = 1$):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x = 0, \\ \exp(-\frac{1}{x^2}), & \text{wenn } x \neq 0. \end{cases}$$

(p) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Sei

$$g(x) = f(x)f''(x) - (f'(x))^2$$

für $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ○ g ist n-mal differenzierbar, aber nicht notwendigerweise $(n+1)$-mal differenzierbar.
- ○ g ist $(n-1)$-mal differenzierbar, aber nicht notwendigerweise n-mal differenzierbar.
- ● g ist $(n-2)$-mal differenzierbar, aber nicht notwendigerweise $(n-1)$-mal differenzierbar.
- ○ g ist nicht notwendigerweise $(n-2)$-mal differenzierbar.

Lösung: Da f n-mal differenzierbar ist, ist f' $(n-1)$-mal differenzierbar, und f'' ist $(n-2)$-mal differenzierbar. Beim Bilden von $g(x) = f(x)f''(x) - (f'(x))^2$ erhalten wir die "niedrigste" Differenzierbarkeit der einzelnen Komponenten. Das bedeutet, dass g $(n-2)$-mal differenzierbar ist, jedoch nicht notwendigerweise $(n-1)$-mal. Ein Beispiel einer Funktion f, die 4-mal differenzierbar ist, und so dass g *nicht* 3-mal differenzierbar ist, ist $f(x) = |x|^5 + 1$.

(q) Für zwei beschränkte, integrierbare Funktionen $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmt ***nicht*** für alle solchen Funktionen f und g?

○ $0 \le d(f,g) = d(g,f)$

○ $d(f,g) \le d(f, g/2) + d(g/2, 0)$

● $d(f \cdot g, 0) \le d(f,0) \cdot d(g,0)$

○ $d(f \cdot g, 0) \le \sqrt{d(f^2,0) \cdot d(g^2,0)}$

Lösung: Die dritte Aussage würde bedeuten, dass stets

$$\int_0^1 |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \le \left(\int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_0^1 |g(x)| \,\mathrm{d}x\right)$$

gilt. Dies ist nicht der Fall, wie man z.B. schon mit $f(x) = g(x) = x$ sieht.

Die anderen Optionen sind korrekt. Sie verwenden Positivität des Integrals (Satz 5.3.1), die Dreiecksungleichung in der Form $|f(x) - g(x)| \le |f(x) - g(x)/2| + |g(x)/2|$, sowie die Cauchy–Schwarz Ungleichung (Satz 5.3.3).

(r) Sei

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

für $n \in \mathbb{N}^*$. Was ist der Wert von $\lim_{n\to\infty} b_n$?

● $\ln(2)$

○ $\dfrac{\pi}{4}$

○ $\dfrac{e-1}{2}$

○ $\dfrac{2}{3}$

Lösung: Der Term

$$b_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

ist eine Riemann-Summe für das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x,$$

das den Wert $\ln(2)$ hat. Wenn $n \to \infty$, konvergieren die Riemann-Summen gegen das Integral (Korollar 5.1.9). Somit konvergiert b_n gegen $\ln(2)$.

(s) Wir betrachten die folgende Funktion definiert auf $[0,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1-x, & \text{wenn } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen über das Oberintegral $S(f)$ von f über $[0,1]$ und das Unterintegral $s(f)$ von f über $[0,1]$ stimmt?

- ○ $s(f) = S(f) = \frac{1}{2}$
- ● $s(f) = \frac{1}{4}$ und $S(f) = \frac{3}{4}$
- ○ $s(f) = \frac{1}{2}$ und $S(f) = \frac{3}{2}$
- ○ $s(f) = S(f) = \frac{1}{4}$

Lösung: Die Funktion f ist auf den rationalen und den irrationalen Zahlen unterschiedlich definiert. Da die rationalen und irrationalen Zahlen beide dicht in $[0,1]$ liegen, liegt jede Untersumme sowohl unter der Funktion x als auch unter $1-x$, also unter dem Minimum $\min\{x, 1-x\}$. Da letztere Funktion über $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist, kommen die Untersummen beliebig nahe an

$$\int_0^1 \min\{x, 1-x\}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} x\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 (1-x)\,\mathrm{d} = \frac{1}{4}.$$

Somit ist das Unterintegral $s(f)$ als Supremum aller Untersummen gleich $\frac{1}{4}$. Analog liegen alle Obersummen von f sowohl Über der Funktion x als auch über $1-x$, also über $\max\{x, 1-x\}$, und kommen beliebig nahe an

$$\int_0^1 \max\{x, 1-x\}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} (1-x)\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}.$$

Somit ist das Oberintegral $S(f)$ als Infimum aller Obersummen gleich $\frac{3}{4}$.

(t) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

○ Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in [N, \infty)$ gilt, dass $|f(x)| < \varepsilon$.

● Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $N \in \mathbb{N}$ existiert $x \in [N, \infty)$, so dass $|f(x)| < \varepsilon$.

○ Es existieren $C > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in [N, \infty)$ gilt, dass $|f(x)| < C$.

○ Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.

Lösung: Die erste Aussage impliziert die dritte, und die dritte Aussage muss nicht gelten. Man betrachte als Gegenbeispiel z.B. Eine Funktion f, die immer 0 ist, ausser in den Intervallen $\big(n - 1/(2n^3), n + 1/(2n^3)\big)$ für $n \in \mathbb{N}^*$, die Eigenschaft $f(n) = n$ erfüllt, und zwischen den Punkten $n - 1/(2n^3)$ und n und zwischen n und $n + 1/(2n^3)$ jeweils linear ist. Dann ist f unbeschränkt, aber das Integral $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert, da sich die Integrale $\int_0^N f(x)\,\mathrm{d}x$ durch einen Vergleich mit der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ nach oben beschränken lassen.

Die zweite Aussage ist richtig aufgrund des Zwischenwertsatzes: Wäre sie falsch, so gäbe es (Möglichkeit 1) entweder ein $\varepsilon_1 > 0$ und $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in [N_1, \infty)$ gilt, dass $f(x) \geq \varepsilon_1$, oder (Möglichkeit 2) es gäbe ein $\varepsilon_2 > 0$ und $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in [N_2, \infty)$ gilt, dass $f(x) \leq -\varepsilon_2$. (In der Tat, eine stetige Funktion, kann nicht von $\geq \varepsilon$ zu $\leq -\varepsilon$ "springen".) Beides steht aber im Widerspruch zur Konvergenz des Integrals $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.