

1 Computations

0.1. Finde inf und sup der folgenden Mengen.

(a) $A_1 = \{\frac{n^2-1}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}\}$. $\inf A_1 = -1$, $\sup A_1 = 1$

(b) $A_2 = \{\frac{3n}{2n+1} - (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$. $\inf A_2 = -1$, $\sup A_2 = \frac{5}{2}$

0.2. Finde $\liminf$ und $\limsup$ der folgenden Folgen.

(a) $a_n = \sin(\pi \ln(n))$. $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$

(b) $b_n = \exp((-1)^n \sqrt[n]{n})$. $\liminf b_n = e^{-1}$, $\limsup b_n = e$

0.3. Finde den Grenzwert der folgenden Folgen.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n})^{3n} = e^6$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 - 1} = \frac{3}{2}$

0.4. Gegeben ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, finde die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} an einem bestimmten Punkt y_0 .

(a) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$, $y_0 = 0$. $(f^{-1})'(y_0) = \frac{3}{2}$

(b) $D = (\frac{9}{10}, \infty)$, $g(x) = 3x + \frac{e^x}{x}$, $y_0 = e + 3$. $(g^{-1})'(y_0) = \frac{1}{3}$

0.5. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

(a) $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$. $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

(b) $x = 0$ is a local minimum, $x = 2$ is a local maximum.

(c) Taylorpolynom: $x^2 - x^3$

0.6. Berechne den Wert der folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} = \frac{1}{2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{x} = 3$

0.7. Bestimme für jede der folgenden Reihen, ob sie konvergiert oder nicht. Im Falle der Konvergenz bestimme, ob sie absolut konvergiert oder nicht.

(a) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converges absolutely.

(b) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n n^2}{\sqrt{n^4 + n^3}}$ doesn't converge.

0.8. Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

(a) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^n}{n^2} x^n$ has a convergence radius of $\rho = \frac{1}{2}$.

(b) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n n!}{n^n} \cdot x^n$ has a convergence radius of $\rho = e$.

0.9. Berechne die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $\int \frac{x^2-1}{x^3+x} dx = \ln(x^2+1) - \ln|x|$

(b) $\int e^{3x} \cos(x) dx = \frac{1}{10} e^{3x} (\sin(x) + 3 \cos(x))$

0.10. Berechne die folgenden bestimmten Integrale.

(a) $\int_0^1 x^2 \ln(1+x^3) dx = \frac{1}{3} (2 \ln(2) - 1) = \frac{1}{3} (\ln(4) - 1)$

(b) $\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)^2 dx = \frac{\pi}{2}$