1 Open

0.1. 1 Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen.

(a) Beweisen Sie: Wenn die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert und $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n^2$.

Lösung: Variante 1: Sei $C = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dann ist $C < \infty$ aufgrund der Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$. Da $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$ gilt dann $0 \leq a_n \leq C$ für alle $n \geq 1$. Da $a_n \geq 0$ folgt daraus $0 \leq a_n^2 \leq Ca_n$ für alle $n \geq 1$. Da $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert, konvergiert auch $\sum_{n\geq 1} Ca_n$ (Satz 2.7.4(2)). Somit folgt aus dem Vergleichssatz (Korollar 2.7.7), dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ konvergiert.

Variante 2: Wir wissen (Clicker-Frage in der Vorlesung), dass aus aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ folgt, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen 0 konvergiert. Somit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $0 \leq a_n \leq 1$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt für alle $n \geq N$ aufgrund von $a_n \geq 0$, dass $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ für alle $n \geq N$. Somit folgt aus dem Vergleichssatz (Korollar 2.7.7), dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ konvergiert.

Variante 3: Wir wissen (Clicker-Frage in der Vorlesung), dass aus aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ folgt, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen 0 konvergiert. Aus der Konvergenz folgt die Beschränktheit (Bemerkung 2.1.5), also gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a_n \leq C$ für alle $n \geq 1$. Da $a_n \geq 0$ folgt daraus $0 \leq a_n^2 \leq Ca_n$ für alle $n \geq 1$. Da $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert, konvergiert auch $\sum_{n\geq 1} Ca_n$ (Satz 2.7.4(2)). Somit folgt aus dem Vergleichssatz (Korollar 2.7.7), dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ konvergiert.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer konvergenten Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$, so dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sqrt{a_n}$ *nicht* konvergiert. Geben Sie eine kurze Begründung (höchstens 2 Sätze).

Lösung: Wir können zum Beispiel für $n \in \mathbb{N}^*$ definieren:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{wenn } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Kurze Begründung: Die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert, da diese Reihe ein Teil der konvergenten Reihe $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ ist. Die Reihe $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sqrt{a_n}$ divergiert, da

$$(-1)^n \sqrt{a_n} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}, & \text{wenn } n = 2k \text{ gerade.} \end{cases}$$

und die harmonische Reihe $\sum_{k\geq 1} 1/k$ divergiert.

(c) Erklären Sie, wieso Teil (b) nicht im Widerspruch zum Leibniz-Kriterium steht.

Lösung: Eine der Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums für eine Reihe der Form $\sum_{n\geq 1}(-1)^n b_n$ mit $b_n \geq 0$ für alle n ist, dass die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ *monoton fallend* ist. Dies ist hier nicht erfüllt, und damit ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar.

0.2. 2 Betrachten Sie die Potenzreihe

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots .$$

(a) Beweisen Sie, dass S in den Punkten $x_1 = -1$ and $x_2 = 1$ nicht konvergiert.

Lösung: Variante 1: Wir wissen, dass für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ notwendig ist, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (Clicker-Frage in der Vorlesung). Dies ist für S in den Punkten $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ nicht erfüllt, da die Summanden der Potenzreihe in diesen Punkten genau $(-1)^n$ sind. Also konvergiert S nicht in $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

Variante 2: Die Partialsummen $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2n}$ für $N \in \mathbb{N}$ sind für $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ gegeben durch

$$S_N(x_{1,2}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } N \text{ gerade,} \\ 0, & \text{wenn } N \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Somit konvergiert die Folge der Partialsummen von S in den Punkten $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ nicht, und somit divergiert die Reihe Potenzreihe S in den Punkten $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ gemäss Definition.

(b) Beweisen Sie, dass $\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}$.

Lösung: Wir bemerken, dass die Potenzreihe $S(x)$ als geometrische Reihe geschrieben werden kann, nämlich $S(x) = \sum_{n\geq 0}(-x^2)^n$. Aus der Formel in der Vorlesung (Beispiel 2.7.2) folgt, dass $S(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$ für $|x| < 1$. Somit gilt

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2},$$

wobei wir die Stetigkeit der Funktion $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ im Punkt $x_0 = 1$ benutzt haben.

(c) Betrachten Sie die Folge der Partialsummen

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2n}$$

für $N \in \mathbb{N}$. Konvergiert die Funktionenfolge $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ gleichmässig im halboffenen Intervall $[0, 1)$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Nein, die Konvergenz ist in $[0,1)$ nicht gleichmässig.

Beweisvariante 1: Wenn die Konvergenz gleichmässig wäre, dann müssten alle Partialsummen $S_N(x)$ ab einem genügend grossen Index N_0 vollständig in einem 1/4-Schlauch um die Grenzfunktion $S(x)$ liegen, und zwar in ganz $[0,1)$. Formal bedeutet dies:

$$\exists N_0 \, \forall N \geq N_0 \, \forall x \in [0,1) : |S_N(x) - S(x)| < 1/4.$$

Es gilt aber für alle N

$$\lim_{x\to 1^-} S_{2N}(x) = \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + 1 = 1,$$
$$\lim_{x\to 1^-} S_{2N+1}(x) = \sum_{n=0}^{2N+1} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + 1 - 1 = 0.$$

Der Abstand $|S_{2N}(x) - S_{2N+1}(x)|$ strebt also gegen 1 wenn $x \to 1^-$. Somit können für kein $N \in \mathbb{N}$ sowohl $S_{2N}(x)$ und $S_{2N+1}(x)$ in einem 1/4-Schlauch um $S(x)$ liegen, da sonst $|S_{2N}(x) - S_{2N+1}(x)|$ nicht grösser als 1/2 werden könnte wenn $x \to 1^-$. Die Konvergenz kann also nicht gleichmässig sein.

Beweisvariante 2: Wenn die Konvergenz gleichmässig wäre, dann müsste das Cauchy-Kriterium für gleichmässige Konvergenz (Korollar 3.7.6) erfüllt sein. Es gilt aber für alle $N \in \mathbb{N}^*$ und $x \in [0,1)$:

$$|S_N(x) - S_{N-1}(x)| = x^{2N}.$$

Da $\lim_{x\to 1^-} x^{2N} = 1$ gibt es für $\varepsilon = 1/2$ kein N_0 so dass für alle $M, N \geq N_0$ und alle $x \in [0,1)$ gilt, dass $|S_N(x) - S_M(x)| < 1/2$. Somit ist das Cauchy-Kriterium nicht erfüllt und die Konvergenz kann nicht gleichmässig sein.

0.3. 3 In dieser Aufgabe bezeichnet $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die auf allen kompakten Teilintervallen von $\mathbb{R}$ integrierbar ist. Wir definieren für $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion f, so dass die oben definierte Funktion F in (zumindest) einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ *nicht* differenzierbar ist. Geben Sie f, F, x_0 explizit an.

Lösung: Wir können zum Beispiel definieren:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -1, & \text{wenn } x < 0. \end{cases}$$

Dann ist $F(x) = |x|$, und somit ist F nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass F in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Lösung: Da f beschränkt ist, gibt es ein $C > 0$ mit $|f(t)| \leq C$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt (Bemerkung 5.2.9):

$$F(x) - F(y) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Betrachten wir $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y < x$, dann folgt somit mit der Dreiecksungleichung für Integrale (Korollar 5.3.2):

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_y^x \underbrace{|f(t)|}_{\leq C}\,\mathrm{d}t \leq C(x-y) = C|x-y|. \tag{1}$$

Analog kann man $x < y$ betrachten und erhält auch in diesem Fall:

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y \underbrace{|f(t)|}_{\leq C}\,\mathrm{d}t \leq C(y-x) = C|x-y|, \tag{2}$$

also dieselbe Ungleichung wie in (1). Wir weisen nun die Stetigkeit von F in einem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ anhand der Definition nach. Sei dafür $\varepsilon > 0$ und definiere $\delta := \varepsilon / C$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ aufgrund von (1) bzw. (2), dass

$$|F(x) - F(x_0)| \leq C|x - x_0| < C \cdot \delta = \varepsilon.$$

Somit ist die Stetigkeit von F in x_0 nachgewiesen.