Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Dr. Roland Prohaska

Analysis I D-INFK

1. Februar 2025

Prüfung: 401-0212-16L Analysis I

Winter 2025

Initialen: Ad An **Dep: INFK** **Legi-Nr.: **-927-334** **ID: 1**

Wichtig:

- Legen Sie Ihre ETH-Karte (Legi) offen auf den Tisch.
- Schreiben Sie leserlich mit einem nicht löschbaren blauen oder schwarzen Stift, insbesondere **nicht** mit Bleistift oder anderen Farben. Beachten Sie, dass das, was nicht eindeutig lesbar ist, nicht gewertet werden kann.
- Diese Prüfung dauert 180 Minuten und umfasst 20 Single-Choice-Fragen, 10 Box-Fragen, bei denen nur das Endergebnis bewertet wird, und 3 offene Fragen, bei denen das Endergebnis und der Lösungsweg bewertet werden.

Für die Single-Choice-Fragen (Fragen 1-20):

- Es ist immer genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig.
- **BITTE BEACHTEN SIE:** Übertragen Sie Ihre Antworten rechtzeitig auf das **Antwortblatt für Single-Choice-Fragen**. Bei diesen Fragen werden nur Ihre Antworten auf dem Antwortblatt berücksichtigt.
- Jede Aufgabe gibt 1 Punkt, wenn sie richtig beantwortet wurde, und 0 Punkte sonst.

Für die Box-Fragen (Fragen 21-30):

- Der Lösungsweg und die Zwischenergebnisse werden nicht bewertet, es zählt nur das Endergebnis.
- Schreiben Sie das Ergebnis in den dafür vorgesehenen Platz neben oder unter der Aufgabe.
- Vor jeder Teilaufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.

Für die offenen Fragen (Fragen 31-33):

- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege. Verwenden Sie den dafür vorgesehenen Platz nach der Aufgabe.
- Wenn Sie mehr Platz benötigen, können Sie eigenes zusätzliches Papier verwenden. Schreiben Sie in diesem Fall auf jedes zusätzlich abgegebene Blatt klar sichtbar die Aufgabennummer und Ihre anonymisierte Legi-Nr. Stellen Sie bei der Abgabe sicher, dass Sie alle zusätzlichen Blätter zusammen mit der Prüfung abgeben.
- Vor jeder Teilaufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.

Zugelassene Hilfsmittel:

- Zusammenfassung auf maximal 12 A4-Seiten (6 A4-Blätter beidseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt.
- **Keine** sonstige Literatur, **kein** Taschenrechner, **kein** Mobiltelefon, **kein** Laptop.
- Ein allgemeinsprachliches Wörterbuch zwischen der Muttersprache und Deutsch, für Kandidat:innen, deren Muttersprache nicht Deutsch ist.

Viel Erfolg!

Ad An

Legi Nr. **-927-334, ID: 1

Single-Choice-Fragen

Erinnerung: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen mit 0, und $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$.

Frage 1 Welche der folgenden Aussagen ist eine direkte Konsequenz des Archimedischen Prinzips?

- A Es existiert eine kleinste positive reelle Zahl.
- B Die natürlichen Zahlen sind unbeschränkt in den reellen Zahlen.
- C Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.
- D Die natürlichen Zahlen haben ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Frage 2 Sei $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 4\}$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- A S ist nicht nach oben beschränkt.
- B Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x \in S \implies x/2 \in S$.
- C S hat ein Infimum in $\mathbb{R}$.
- D $\sup(S) \in \mathbb{Q}$

Frage 3 Der dreidimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^3$ mit der üblichen Vektoraddition $+$ und dem Kreuzprodukt $\times$ als Multiplikation ist kein Körper, da...

- A die Distributivität nicht gilt.
- B es kein Einselement gibt.
- C die Ordnungsvollständigkeit nicht gilt.
- D es kein Nullelement gibt.

Frage 4 Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $(z - i)^n = e$ in der Variablen z in $\mathbb{C}$?

- A n
- B unendlich viele
- C 0
- D 1

Frage 5 Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Welche der folgenden Aussagen impliziert ***nicht*** die Konvergenz von $(a_n)_{n\geq 1}$?

- A Es existiert $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass jede konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ den Grenzwert α hat.
- B Jede monotone Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.
- C Es existiert $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass jede Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert α besitzt.
- D $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchy-Folge.

Frage 6 Welche der folgenden Aussagen eignet sich am besten als Formalisierung der informellen Heuristik "exponentielles Wachstum ist schneller als jedes polynomiale Wachstum"?

- A Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x > -1$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$.
- B Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.
- C Die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$.
- D Für alle $a > 1$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.

Frage 7 Sei

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n + \frac{1}{n}}{2 + (-1)^n}$$

für $n \in \mathbb{N}^*$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- [A] $\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty}(-a_n) = 0$
- [B] $\limsup_{n\to\infty} a_n > 0$ und $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) < 0$
- [C] $\limsup_{n\to\infty} a_n > 0$ und $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = 0$
- [D] $\limsup_{n\to\infty} a_n > 0$ und $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) > 0$

Frage 8 Für die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{10^n}{n!}$ impliziert das Quotientenkriterium, dass die Reihe...

- [A] divergiert.
- [B] konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.
- [C] absolut konvergiert.
- [D] Das Quotientenkriterium erlaubt keinen Schluss über die Konvergenz oder Divergenz dieser Reihe.

Frage 9 Wenn eine Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ mit reellen Koeffizienten Konvergenzradius 1 hat, dann...

- [A] stellt die Potenzreihe eine beschränkte Funktion von $(-1, 1)$ nach $\mathbb{R}$ dar.
- [B] stellt die Potenzreihe eine stetige Funktion von $(-1, 1)$ nach $\mathbb{R}$ dar.
- [C] konvergiert die Potenzreihe in den Punkten 1 und -1.
- [D] divergiert die Potenzreihe in den Punkten 1 und -1.

Frage 10 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- [A] Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.
- [B] Wenn $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, dann ist $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \infty$.
- [C] Wenn f beschränkt ist, dann existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
- [D] Wenn f bijektiv ist, dann ist f streng monoton.

Frage 11 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to I$ eine monoton wachsende Funktion, so dass für alle $x, y \in I$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ gilt. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- [A] Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.
- [B] Ein Beispiel für eine Funktion, die alle Eigenschaften in der Frage erfüllt, ist $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = x^2$.
- [C] Wenn I unbeschränkt ist, dann ist f surjektiv.
- [D] Wenn I beschränkt ist, dann ist $f(x) = x$ für alle $x \in I$.

Frage 12 Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionen

$$f_n, g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}, \quad g_n(x) = \frac{x}{1 + nx}.$$

Welche der folgenden Aussagen über die gleichmässige Konvergenz der Funktionenfolgen $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ stimmt?

- [A] Von den beiden Funktionenfolgen konvergiert nur $(g_n)_n$ gleichmässig in $[0, 1]$.
- [B] Beide Funktionenfolgen konvergieren gleichmässig in $[0, 1]$.
- [C] Keine der beiden Funktionenfolgen konvergiert gleichmässig in $[0, 1]$.
- [D] Von den beiden Funktionenfolgen konvergiert nur $(f_n)_n$ gleichmässig in $[0, 1]$.

Frage 13 Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion $f_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 = 0$?

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(1/x), & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

- A Für alle $\alpha \in (0,1)$.
- B Für alle $\alpha < 0$.
- C Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.
- D Für alle $\alpha > 1$.

Frage 14 Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen stimmt ***nicht***?

- A Wenn $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f beschränkt.
- B Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f unbeschränkt.
- C Wenn f in $x_0 \in \mathbb{R}$ ein globales Minimum besitzt, dann ist $f'(x_0) = 0$.
- D Wenn $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$, dann ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Frage 15 Sei $f \colon (0,3) \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- A Wenn f in $(0,1)$ streng konvex ist und $f'(2) < 0$, dann gibt es ein $\xi \in (1,2)$ mit $f''(\xi) < 0$.
- B Wenn f in $(0,1)$ streng monoton wachsend ist und $f'(2) > 0$, dann gibt es ein $\xi \in (1,2)$ mit $f''(\xi) > 0$.
- C Wenn f in $(0,1)$ streng konvex ist und $f'(2) > 0$, dann gibt es ein $\xi \in (1,2)$ mit $f''(\xi) > 0$.
- D Wenn f in $(0,1)$ streng monoton wachsend ist und $f'(2) < 0$, dann gibt es ein $\xi \in (1,2)$ mit $f''(\xi) < 0$.

Frage 16 Sei $f \colon (-2,2) \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir betrachten das Taylorpolynom

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

der Ordnung n von f in $x_0 = 0$. Welche der folgenden Aussagen stimmt ***nicht***?

- A Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_n f(x)}{x^n} = 0$.
- B Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $T_n f$ das eindeutige Polynom vom Grad höchstens n, so dass $(T_n f)^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ für alle $x \in (-2,2)$ und alle $0 \leq k \leq n$.
- C Es existiert $t \in [0,1]$, so dass $f(1) - T_{24} f(1) = \dfrac{f^{(25)}(t)}{25!}$.
- D Wenn f durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 2 dargestellt werden kann, dann gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n f(x) = f(x)$ für alle $x \in (-2,2)$.

Frage 17 Sei $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Welche der folgenden Aussagen stimmt ***nicht***?

- A Wenn f in allen Punkten in $[0,1]$ ausser $x_0 = 1/2$ stetig ist, dann ist f Riemann-integrierbar über $[0,1]$.
- B Wenn f in $[0,1/2]$ monoton steigend und in $[1/2,1]$ monoton fallend ist, dann ist f Riemann-integrierbar über $[0,1]$.
- C Wenn f über $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist, dann hat f höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen.
- D Wenn f in $[0,1]$ differenzierbar ist, dann ist f Riemann-integrierbar über $[0,1]$

Frage 18 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei

$$g(x) = \int_x^{2x+1} f(t)^2 \, \mathrm{d}t$$

für $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Gleichungen gilt immer?

- A $g'(1) = f(1)^2$
- B $g'(0) = f(0)^2$
- C $g'(-1) = f(-1)^2$
- D $g'(2) = f(2)^2$

Frage 19 Wir betrachten das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Welche der folgenden Aussagen beschreibt das Konvergenzverhalten dieses Integrals am besten?

- A Das gegebene uneigentliche Integral divergiert, weil das uneigentliche Integral von $1/x$ über $[1, \infty)$ divergiert.
- B Das gegebene uneigentliche Integral divergiert, weil $\sin(x)$ für $x \to \infty$ zwischen 1 und -1 oszilliert.
- C Das gegebene uneigentliche Integral konvergiert. Zur Begründung kann man ähnliche Argumente verwenden wie für das Leibniz-Kriterium für Reihen.
- D Das gegebene uneigentliche Integral konvergiert, weil $\dfrac{\sin(x)}{x}$ auf $[1, \infty)$ beschränkt ist und $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.

Frage 20 Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei

$$a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Zu welcher Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ asymptotisch äquivalent?

- A $b_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{2\pi n}}$
- B $b_n = \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$
- C $b_n = (4n)^n e^{-n}$
- D $b_n = 2^{2n}$

Box-Fragen

Erinnerung: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen mit 0, und $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$.

Frage 21 Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum der folgenden Mengen.

- *(1 Punkt)* $A_1 = \left\{ 2 - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

  $\inf A_1 =$ ______________________ $\sup A_1 =$ ______________________

- *(1 Punkt)* $A_2 = \left\{ \frac{1}{n^2+1} + \frac{(-1)^n}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

  $\inf A_2 =$ ______________________ $\sup A_2 =$ ______________________

Frage 22 Bestimmen Sie den Limes superior und Limes inferior der folgenden Folgen.

- *(1 Punkt)* $a_n = \sin\bigl(n\pi/3\bigr)$ für $n \in \mathbb{N}^*$

  $\liminf_{n\to\infty} a_n =$ ______________________ $\limsup_{n\to\infty} a_n =$ ______________________

- *(1 Punkt)* $b_n = \sqrt[3]{n + 1 + (-1)^n} - \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{1 + (-1)^n}$ für $n \in \mathbb{N}^*$

  $\liminf_{n\to\infty} b_n =$ ______________________ $\limsup_{n\to\infty} b_n =$ ______________________

Frage 23 Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen.

- *(1 Punkt)* $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$ für $n \in \mathbb{N}^*$

  $\lim_{n\to\infty} a_n =$ ______________________

- *(1 Punkt)* $b_n = n \ln\left(\frac{3n}{3n-1}\right)$ für $n \in \mathbb{N}^*$

  $\lim_{n\to\infty} b_n =$ ______________________

Frage 24 Gegeben sind im Folgenden je ein Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$, eine injektive differenzierbare Funktion $D \to \mathbb{R}$, und ein Punkt $y_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der Umkehrfunktion in y_0.

- *(1 Punkt)* $D = (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{2x + \sin(x)}$, $y_0 = \frac{1}{2\pi}$

  $(f^{-1})'(y_0) =$ ______________________

- *(1 Punkt)* $D = (0, \infty)$, $g(x) = (x+1)^x$, $y_0 = 9$

  $(g^{-1})'(y_0) =$ ______________________

Frage 25 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{e^{x^2} + 4}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

- *(1 Punkt)* Berechnen Sie die erste Ableitung f' der Funktion f und die Anzahl der Nullstellen von f' in $\mathbb{R}$.

  $f'(x) =$ ____________________ Anzahl Nullstellen von f' : __________

- *(1 Punkt)* Bestimmen Sie die globalen Extrema von f. Wenn es keine globale Maximalstelle bzw. Minimalstelle gibt, schreiben Sie "existiert nicht" in die entsprechende Zeile.

  Globales Maximum: ____

  Globales Minimum: ____

- *(1 Punkt)* Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 3 von f in $x_0 = 0$.

  Taylorpolynom: ____

Frage 26 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

- *(1 Punkt)*

  $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- *(1 Punkt)*

  $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin(x)}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Frage 27 Entscheiden Sie für jede der folgenden Reihen, ob sie konvergiert oder divergiert. Im Falle der Konvergenz entscheiden Sie, ob die Reihe absolut konvergiert oder nicht.

- *(1 Punkt)*

  $$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)^3} : \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- *(1 Punkt)*

  $$\sum_{n\geq 1} \frac{(2n+3)^{n-1}}{(3n+5)^n} : \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Frage 28 Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der folgenden Potenzreihen.

- *(1 Punkt)*

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+8}{n}\right)^{n^2}\cdot x^n : \qquad \rho = \underline{\hspace{8cm}}$$

- *(1 Punkt)*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n2^n}\cdot x^{2n} : \qquad \rho = \underline{\hspace{8cm}}$$

Frage 29 Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

- *(1 Punkt)*

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \underline{\hspace{12cm}}$$

- *(1 Punkt)*

$$\int \frac{\sin(\ln(x))\cos(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x = \underline{\hspace{12cm}}$$

Frage 30 Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

- *(1 Punkt)*

$$\int_0^2 (x+1)^2\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \underline{\hspace{12cm}}$$

- *(1 Punkt)*

$$\int_0^{45}\frac{1}{2025+x^2}\,\mathrm{d}x = \underline{\hspace{12cm}}$$

Offene Fragen

Frage 31

(a) *(1 Punkt)* Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$ sei $f_n(x) = x^{n+1}$. Finden Sie für jedes $n \geq 1$ einen Punkt $a_n \in [0,1]$ mit $f_n'(a_n) = 1/\pi$. Geben Sie eine explizite Formel für a_n an.

(b) *(4 Punkte)* Seien $g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen (für $n \in \mathbb{N}$), so dass die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) die Folge $(g_n(0))_n$ der Funktionswerte in 0 konvergiert für $n \to \infty$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\bigl\{|g_n'(x)| \bigm| x \in [0,1]\bigr\} = 0$

Beweisen Sie, dass die Funktionenfolge $(g_n)_n$ gleichmässig in $[0,1]$ konvergiert.

(c) *(1 Punkt)* Es ist bekannt, dass die Funktionenfolge $(f_n)_n$ aus Teil (a) ***nicht*** gleichmässig in $[0,1]$ konvergiert. Erklären Sie, wieso dies nicht im Widerspruch zu Teil (b) steht.

Frage 32 Sei $(b_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen und $y \in \mathbb{R}$ mit $0 < y < 1$. Wir definieren $a_0 := 0$ und, für $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n := a_{n-1} \cdot y + b_n.$$

(a) *(2 Punkte)* Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die folgende Formel gilt:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k y^{n-k}$$

(b) *(3 Punkte)* Verwenden Sie die Formel aus Teil (a), um für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die folgende Ungleichung zu beweisen:

$$|a_{2n}| \leq \frac{1}{1-y} \cdot \left(\max\{|b_1|, \ldots, |b_n|\} \cdot y^n + \max\{|b_{n+1}|, \ldots, |b_{2n}|\}\right)$$

(c) *(3 Punkte)* Wir nehmen nun zusätzlich an, dass $(b_n)_{n\geq 1}$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Verwenden Sie die Ungleichung aus Teil (b) um zu beweisen, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0.$$

Frage 33 In dieser Aufgabe bezeichnet $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und integrierbare Funktion. Wir erinnern daran, dass $f \geq 0$ bedeutet, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$. Es ist bekannt, dass aus $f \geq 0$ folgt, dass $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ (Monotonie des Integrals).

(a) *(3 Punkte)* Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f \geq 0$, die auf $[0,1]$ nicht konstant 0 ist, für die aber

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

gilt. Beweisen Sie Ihre Antwort.

(b) *(4 Punkte)* Beweisen Sie: Wenn f stetig ist, $f \geq 0$, und f auf $[0,1]$ nicht konstant 0 ist, dann gilt

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

Antwortblatt für Single-Choice-Fragen:

Ad An

Legi Nr. **-927-334, ID: 1

- Die Antworten zu den Single-Choice-Fragen (Fragen 1 bis 20) müssen auf diesem Blatt eingetragen werden. Bitte füllen Sie zur Beantwortung das gewählte Kästchen **vollständig** aus.
- Wenn Sie eine Antwort korrigieren wollen, verwenden Sie **Tipp-Ex**.
- Lassen Sie die Kästchen für die Aufgaben 21-33 **frei**.

Frage 1 : A B C D
Frage 2 : A B C D
Frage 3 : A B C D
Frage 4 : A B C D
Frage 5 : A B C D
Frage 6 : A B C D
Frage 7 : A B C D
Frage 8 : A B C D
Frage 9 : A B C D
Frage 10 : A B C D
Frage 11 : A B C D
Frage 12 : A B C D
Frage 13 : A B C D
Frage 14 : A B C D
Frage 15 : A B C D
Frage 16 : A B C D
Frage 17 : A B C D
Frage 18 : A B C D
Frage 19 : A B C D
Frage 20 : A B C D

Frage 21 : . . 0 1 2
Frage 22 : . . 0 1 2
Frage 23 : . . 0 1 2
Frage 24 : . . 0 1 2
Frage 25 : . . 0 1 2 3
Frage 26 : . . 0 1 2
Frage 27 : . . 0 1 2
Frage 28 : . . 0 1 2
Frage 29 : . . 0 1 2
Frage 30 : . . 0 1 2
Frage 31 : . . 0 1 2 3 4 5 6
Frage 32 : . . 0 1 2 3 4 5 6 7 8
Frage 33 : . . 0 1 2 3 4 5 6 7

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Dr. Roland Prohaska | Analysis I D-INFK | 1. Februar 2025

Prüfung: 401-0212-16L Analysis I

Winter 2025

Initialen: Bo Ga **Dep: INFK** **Legi-Nr.: **-934-891** **ID: 2**

Wichtig:

- Legen Sie Ihre ETH-Karte (Legi) offen auf den Tisch.
- Schreiben Sie leserlich mit einem nicht löschbaren blauen oder schwarzen Stift, insbesondere **nicht** mit Bleistift oder anderen Farben. Beachten Sie, dass das, was nicht eindeutig lesbar ist, nicht gewertet werden kann.
- Diese Prüfung dauert 180 Minuten und umfasst 20 Single-Choice-Fragen, 10 Box-Fragen, bei denen nur das Endergebnis bewertet wird, und 3 offene Fragen, bei denen das Endergebnis und der Lösungsweg bewertet werden.

Für die Single-Choice-Fragen (Fragen 1-20):

- Es ist immer genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig.
- **BITTE BEACHTEN SIE:** Übertragen Sie Ihre Antworten rechtzeitig auf das **Antwortblatt für Single-Choice-Fragen**. Bei diesen Fragen werden nur Ihre Antworten auf dem Antwortblatt berücksichtigt.
- Jede Aufgabe gibt 1 Punkt, wenn sie richtig beantwortet wurde, und 0 Punkte sonst.

Für die Box-Fragen (Fragen 21-30):

- Der Lösungsweg und die Zwischenergebnisse werden nicht bewertet, es zählt nur das Endergebnis.
- Schreiben Sie das Ergebnis in den dafür vorgesehenen Platz neben oder unter der Aufgabe.
- Vor jeder Teilaufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.

Für die offenen Fragen (Fragen 31-33):

- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege. Verwenden Sie den dafür vorgesehenen Platz nach der Aufgabe.
- Wenn Sie mehr Platz benötigen, können Sie eigenes zusätzliches Papier verwenden. Schreiben Sie in diesem Fall auf jedes zusätzlich abgegebene Blatt klar sichtbar die Aufgabennummer und Ihre anonymisierte Legi-Nr. Stellen Sie bei der Abgabe sicher, dass Sie alle zusätzlichen Blätter zusammen mit der Prüfung abgeben.
- Vor jeder Teilaufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.

Zugelassene Hilfsmittel:

- Zusammenfassung auf maximal 12 A4-Seiten (6 A4-Blätter beidseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt.
- **Keine** sonstige Literatur, **kein** Taschenrechner, **kein** Mobiltelefon, **kein** Laptop.
- Ein allgemeinsprachliches Wörterbuch zwischen der Muttersprache und Deutsch, für Kandidat:innen, deren Muttersprache nicht Deutsch ist.

Viel Erfolg!

Bo Ga

Legi Nr. **-934-891, ID: 2

Single-Choice-Fragen

Erinnerung: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen mit 0, und $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$.

Frage 1 Welche der folgenden Aussagen ist eine direkte Konsequenz des Archimedischen Prinzips?

- A Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.
- B Es existiert eine kleinste positive reelle Zahl.
- C Die natürlichen Zahlen sind unbeschränkt in den reellen Zahlen.
- D Die natürlichen Zahlen haben ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Frage 2 Sei $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 4\}$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- A $\sup(S) \in \mathbb{Q}$
- B S hat ein Infimum in $\mathbb{R}$.
- C S ist nicht nach oben beschränkt.
- D Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x \in S \implies x/2 \in S$.

Frage 3 Der dreidimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^3$ mit der üblichen Vektoraddition $+$ und dem Kreuzprodukt $\times$ als Multiplikation ist kein Körper, da...

- A es kein Einselement gibt.
- B die Distributivität nicht gilt.
- C die Ordnungsvollständigkeit nicht gilt.
- D es kein Nullelement gibt.

Frage 4 Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $(z - i)^n = e$ in der Variablen z in $\mathbb{C}$?

- A 1
- B unendlich viele
- C 0
- D n

Frage 5 Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Welche der folgenden Aussagen impliziert ***nicht*** die Konvergenz von $(a_n)_{n\geq 1}$?

- A $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchy-Folge.
- B Es existiert $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass jede konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ den Grenzwert α hat.
- C Es existiert $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass jede Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert α besitzt.
- D Jede monotone Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

Frage 6 Welche der folgenden Aussagen eignet sich am besten als Formalisierung der informellen Heuristik "exponentielles Wachstum ist schneller als jedes polynomiale Wachstum"?

- A Es gilt $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.
- B Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x > -1$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$.
- C Für alle $a > 1$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.
- D Die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Frage 7 Sei

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n + \frac{1}{n}}{2 + (-1)^n}$$

für $n \in \mathbb{N}^*$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

A $\limsup_{n\to\infty} a_n > 0$ und $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = 0$

B $\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty}(-a_n) = 0$

C $\limsup_{n\to\infty} a_n > 0$ und $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) < 0$

D $\limsup_{n\to\infty} a_n > 0$ und $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) > 0$

Frage 8 Für die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{10^n}{n!}$ impliziert das Quotientenkriterium, dass die Reihe...

A absolut konvergiert.

B konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

C Das Quotientenkriterium erlaubt keinen Schluss über die Konvergenz oder Divergenz dieser Reihe.

D divergiert.

Frage 9 Wenn eine Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ mit reellen Koeffizienten Konvergenzradius 1 hat, dann...

A konvergiert die Potenzreihe in den Punkten 1 und -1.

B divergiert die Potenzreihe in den Punkten 1 und -1.

C stellt die Potenzreihe eine stetige Funktion von $(-1, 1)$ nach $\mathbb{R}$ dar.

D stellt die Potenzreihe eine beschränkte Funktion von $(-1, 1)$ nach $\mathbb{R}$ dar.

Frage 10 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

A Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.

B Wenn f bijektiv ist, dann ist f streng monoton.

C Wenn $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, dann ist $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

D Wenn f beschränkt ist, dann existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Frage 11 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to I$ eine monoton wachsende Funktion, so dass für alle $x, y \in I$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ gilt. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

A Ein Beispiel für eine Funktion, die alle Eigenschaften in der Frage erfüllt, ist $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = x^2$.

B Wenn I unbeschränkt ist, dann ist f surjektiv.

C Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.

D Wenn I beschränkt ist, dann ist $f(x) = x$ für alle $x \in I$.

Frage 12 Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionen

$$f_n, g_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}, \quad g_n(x) = \frac{x}{1 + nx}.$$

Welche der folgenden Aussagen über die gleichmässige Konvergenz der Funktionenfolgen $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ stimmt?

A Von den beiden Funktionenfolgen konvergiert nur $(g_n)_n$ gleichmässig in $[0, 1]$.

B Keine der beiden Funktionenfolgen konvergiert gleichmässig in $[0, 1]$.

C Beide Funktionenfolgen konvergieren gleichmässig in $[0, 1]$.

D Von den beiden Funktionenfolgen konvergiert nur $(f_n)_n$ gleichmässig in $[0, 1]$.

Frage 13 Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 = 0$?

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(1/x), & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

- [A] Für alle $\alpha \in (0, 1)$.
- [B] Für alle $\alpha > 1$.
- [C] Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist richtig.
- [D] Für alle $\alpha < 0$.

Frage 14 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen stimmt ***nicht***?

- [A] Wenn $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$, dann ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
- [B] Wenn $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f beschränkt.
- [C] Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f unbeschränkt.
- [D] Wenn f in $x_0 \in \mathbb{R}$ ein globales Minimum besitzt, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Frage 15 Sei $f : (0, 3) \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- [A] Wenn f in $(0, 1)$ streng monoton wachsend ist und $f'(2) > 0$, dann gibt es ein $\xi \in (1, 2)$ mit $f''(\xi) > 0$.
- [B] Wenn f in $(0, 1)$ streng monoton wachsend ist und $f'(2) < 0$, dann gibt es ein $\xi \in (1, 2)$ mit $f''(\xi) < 0$.
- [C] Wenn f in $(0, 1)$ streng konvex ist und $f'(2) < 0$, dann gibt es ein $\xi \in (1, 2)$ mit $f''(\xi) < 0$.
- [D] Wenn f in $(0, 1)$ streng konvex ist und $f'(2) > 0$, dann gibt es ein $\xi \in (1, 2)$ mit $f''(\xi) > 0$.

Frage 16 Sei $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir betrachten das Taylorpolynom

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

der Ordnung n von f in $x_0 = 0$. Welche der folgenden Aussagen stimmt ***nicht***?

- [A] Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $T_n f$ das eindeutige Polynom vom Grad höchstens n, so dass $(T_n f)^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ für alle $x \in (-2, 2)$ und alle $0 \leq k \leq n$.
- [B] Wenn f durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 2 dargestellt werden kann, dann gilt $\lim_{n\to\infty} T_n f(x) = f(x)$ für alle $x \in (-2, 2)$.
- [C] Es existiert $t \in [0, 1]$, so dass $f(1) - T_{24} f(1) = \dfrac{f^{(25)}(t)}{25!}$.
- [D] Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - T_n f(x)}{x^n} = 0$.

Frage 17 Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Welche der folgenden Aussagen stimmt ***nicht***?

- [A] Wenn f über $[0, 1]$ Riemann-integrierbar ist, dann hat f höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen.
- [B] Wenn f in $[0, 1/2]$ monoton steigend und in $[1/2, 1]$ monoton fallend ist, dann ist f Riemann-integrierbar über $[0, 1]$.
- [C] Wenn f in allen Punkten in $[0, 1]$ ausser $x_0 = 1/2$ stetig ist, dann ist f Riemann-integrierbar über $[0, 1]$.
- [D] Wenn f in $[0, 1]$ differenzierbar ist, dann ist f Riemann-integrierbar über $[0, 1]$

Frage 18 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei

$$g(x) = \int_x^{2x+1} f(t)^2 \, \mathrm{d}t$$

für $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Gleichungen gilt immer?

- [A] $g'(-1) = f(-1)^2$
- [B] $g'(2) = f(2)^2$
- [C] $g'(0) = f(0)^2$
- [D] $g'(1) = f(1)^2$

Frage 19 Wir betrachten das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Welche der folgenden Aussagen beschreibt das Konvergenzverhalten dieses Integrals am besten?

- [A] Das gegebene uneigentliche Integral divergiert, weil $\sin(x)$ für $x \to \infty$ zwischen 1 und -1 oszilliert.
- [B] Das gegebene uneigentliche Integral konvergiert, weil $\dfrac{\sin(x)}{x}$ auf $[1, \infty)$ beschränkt ist und $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.
- [C] Das gegebene uneigentliche Integral konvergiert. Zur Begründung kann man ähnliche Argumente verwenden wie für das Leibniz-Kriterium für Reihen.
- [D] Das gegebene uneigentliche Integral divergiert, weil das uneigentliche Integral von $1/x$ über $[1, \infty)$ divergiert.

Frage 20 Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei

$$a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Zu welcher Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ asymptotisch äquivalent?

- [A] $b_n = (4n)^n e^{-n}$
- [B] $b_n = 2^{2n}$
- [C] $b_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{2\pi n}}$
- [D] $b_n = \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Box-Fragen

Erinnerung: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen mit 0, und $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$.

Frage 21 Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum der folgenden Mengen.

- *(1 Punkt)* $A_1 = \left\{ 2 - \dfrac{1}{n+3} + \dfrac{1}{n+4} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf A_1 =$ ____________ $\sup A_1 =$ ____________

- *(1 Punkt)* $A_2 = \left\{ \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{(-1)^n}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf A_2 =$ ____________ $\sup A_2 =$ ____________

Frage 22 Bestimmen Sie den Limes superior und Limes inferior der folgenden Folgen.

- *(1 Punkt)* $a_n = \sin\big(n\pi/3\big)$ für $n \in \mathbb{N}^*$

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n =$ ____________ $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n =$ ____________

- *(1 Punkt)* $b_n = \sqrt[3]{n+1+(-1)^n} - \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{1+(-1)^n}$ für $n \in \mathbb{N}^*$

$\liminf\limits_{n\to\infty} b_n =$ ____________ $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n =$ ____________

Frage 23 Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen.

- *(1 Punkt)* $a_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ für $n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ ____________

- *(1 Punkt)* $b_n = n \ln\left(\dfrac{3n}{3n-1}\right)$ für $n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n =$ ____________

Frage 24 Gegeben sind im Folgenden je ein Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$, eine injektive differenzierbare Funktion $D \to \mathbb{R}$, und ein Punkt $y_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der Umkehrfunktion in y_0.

- *(1 Punkt)* $D = (0, \infty),\ f(x) = \dfrac{1}{2x + \sin(x)},\ y_0 = \dfrac{1}{2\pi}$

$(f^{-1})'(y_0) =$ ____________

- *(1 Punkt)* $D = (0, \infty),\ g(x) = (x+1)^x,\ y_0 = 9$

$(g^{-1})'(y_0) =$ ____________

Frage 25 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{e^{x^2} + 4}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

- *(1 Punkt)* Berechnen Sie die erste Ableitung f' der Funktion f und die Anzahl der Nullstellen von f' in $\mathbb{R}$.

  $f'(x) =$ ______________________ Anzahl Nullstellen von f' : ______________

- *(1 Punkt)* Bestimmen Sie die globalen Extrema von f. Wenn es keine globale Maximalstelle bzw. Minimalstelle gibt, schreiben Sie "existiert nicht" in die entsprechende Zeile.

  Globales Maximum: ____

  Globales Minimum: ____

- *(1 Punkt)* Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 3 von f in $x_0 = 0$.

  Taylorpolynom: ____

Frage 26 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

- *(1 Punkt)*

  $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

- *(1 Punkt)*

  $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin(x)} \right) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Frage 27 Entscheiden Sie für jede der folgenden Reihen, ob sie konvergiert oder divergiert. Im Falle der Konvergenz entscheiden Sie, ob die Reihe absolut konvergiert oder nicht.

- *(1 Punkt)*

  $$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln(n)^3} : \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

- *(1 Punkt)*

  $$\sum_{n \geq 1} \frac{(2n+3)^{n-1}}{(3n+5)^n} : \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Frage 28 Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der folgenden Potenzreihen.

- *(1 Punkt)*

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+8}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n : \qquad \rho = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- *(1 Punkt)*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n} \cdot x^{2n} : \qquad \rho = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Frage 29 Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

- *(1 Punkt)*

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- *(1 Punkt)*

$$\int \frac{\sin(\ln(x))\cos(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Frage 30 Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

- *(1 Punkt)*

$$\int_0^2 (x+1)^2 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- *(1 Punkt)*

$$\int_0^{45} \frac{1}{2025+x^2}\,\mathrm{d}x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Offene Fragen

Frage 31

(a) *(1 Punkt)* Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$ sei $f_n(x) = x^{n+1}$. Finden Sie für jedes $n \geq 1$ einen Punkt $a_n \in [0,1]$ mit $f_n'(a_n) = 1/\pi$. Geben Sie eine explizite Formel für a_n an.

(b) *(4 Punkte)* Seien $g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen (für $n \in \mathbb{N}$), so dass die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) die Folge $(g_n(0))_n$ der Funktionswerte in 0 konvergiert für $n \to \infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sup\{|g_n'(x)| \mid x \in [0,1]\} = 0$

Beweisen Sie, dass die Funktionenfolge $(g_n)_n$ gleichmässig in $[0,1]$ konvergiert.

(c) *(1 Punkt)* Es ist bekannt, dass die Funktionenfolge $(f_n)_n$ aus Teil (a) ***nicht*** gleichmässig in $[0,1]$ konvergiert. Erklären Sie, wieso dies nicht im Widerspruch zu Teil (b) steht.

Frage 32 Sei $(b_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen und $y \in \mathbb{R}$ mit $0 < y < 1$. Wir definieren $a_0 := 0$ und, für $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n := a_{n-1} \cdot y + b_n.$$

(a) *(2 Punkte)* Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die folgende Formel gilt:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k y^{n-k}$$

(b) *(3 Punkte)* Verwenden Sie die Formel aus Teil (a), um für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die folgende Ungleichung zu beweisen:

$$|a_{2n}| \leq \frac{1}{1-y} \cdot \left(\max\{|b_1|, \ldots, |b_n|\} \cdot y^n + \max\{|b_{n+1}|, \ldots, |b_{2n}|\}\right)$$

(c) *(3 Punkte)* Wir nehmen nun zusätzlich an, dass $(b_n)_{n\geq 1}$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Verwenden Sie die Ungleichung aus Teil (b) um zu beweisen, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0.$$

Frage 33 In dieser Aufgabe bezeichnet $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und integrierbare Funktion. Wir erinnern daran, dass $f \geq 0$ bedeutet, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$. Es ist bekannt, dass aus $f \geq 0$ folgt, dass $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ (Monotonie des Integrals).

(a) *(3 Punkte)* Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f \geq 0$, die auf $[0,1]$ nicht konstant 0 ist, für die aber

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

gilt. Beweisen Sie Ihre Antwort.

(b) *(4 Punkte)* Beweisen Sie: Wenn f stetig ist, $f \geq 0$, und f auf $[0,1]$ nicht konstant 0 ist, dann gilt

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

+2/16/28+

Antwortblatt für Single-Choice-Fragen:

Bo Ga

Legi Nr. **-934-891, ID: 2

- Die Antworten zu den Single-Choice-Fragen (Fragen 1 bis 20) müssen auf diesem Blatt eingetragen werden. Bitte füllen Sie zur Beantwortung das gewählte Kästchen **vollständig** aus.
- Wenn Sie eine Antwort korrigieren wollen, verwenden Sie **Tipp-Ex**.
- Lassen Sie die Kästchen für die Aufgaben 21-33 **frei**.

Frage 1 :	A B C D
Frage 2 :	A B C D
Frage 3 :	A B C D
Frage 4 :	A B C D
Frage 5 :	A B C D
Frage 6 :	A B C D
Frage 7 :	A B C D
Frage 8 :	A B C D
Frage 9 :	A B C D
Frage 10 :	A B C D
Frage 11 :	A B C D
Frage 12 :	A B C D
Frage 13 :	A B C D
Frage 14 :	A B C D
Frage 15 :	A B C D
Frage 16 :	A B C D
Frage 17 :	A B C D
Frage 18 :	A B C D
Frage 19 :	A B C D
Frage 20 :	A B C D

Frage 21 : ..	0 1 2
Frage 22 : ..	0 1 2
Frage 23 : ..	0 1 2
Frage 24 : ..	0 1 2
Frage 25 : ..	0 1 2 3
Frage 26 : ..	0 1 2
Frage 27 : ..	0 1 2
Frage 28 : ..	0 1 2
Frage 29 : ..	0 1 2
Frage 30 : ..	0 1 2
Frage 31 : ..	0 1 2 3 4 5 6
Frage 32 : ..	0 1 2 3 4 5 6 7 8
Frage 33 : ..	0 1 2 3 4 5 6 7