Kriterium für Abs. Konvergenz

Quotentenkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$

a) Falls $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

dann konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolute

b) Falls $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$

dann divergiert die Reihe

Bmk

- Falls $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ dann konv. die Reihe $\sum a_k$ abs.
- Falls $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$, dann div. die Reihe.
- Falls $L = 1$ Kein INFO!

Wichtiges Bsp. Für $z \in \mathbb{C}$, die

Exponential Reihe (Exponentialfunkt.)

ist $$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$\exp(z)$ ist konvergent (absolute) für alle $z \in \mathbb{C}$.

1

Bsp $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}^{a_n}$ Harmonische Divergent

$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{b_n}$ ist konvergent

$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$

$\lim \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim \left|\frac{n^2}{n^2+1}\right|$

$= 1.$

Satz (Wurzelkriterium) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge.

1) Falls $\limsup |a_n|^{1/n} < 1$. Dann konv $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abs.

2) Falls $\limsup |a_n|^{1/n} > 1$, Dann div. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Bmk Falls $\lim |a_n|^{1/n} = L$

$L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konv abs.

$L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ div.

$L = 1 \Rightarrow$ Kein INFO.

Bmk: Wurzelkriterium ist stärker als Quotientenkriterium d.h. wenn der Wurzelkriterium versagt, versagt auch Quotientenk. Aber es gibt Bsp, in deren Wurzelkriterium funktioniert aber Quot.K. versagt.

Bsp: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2^n} & n \text{ ungerade.} \end{cases}$

~~Mit~~ Vergleich mit Geometrische Reihe, konv.

$\sum a_n$.

Falls n ungerade, die Teilfolge (a_{n_j}) n_j ungerade

$$|a_{n_j}|^{1/n_j} = (1/2^{n_j})^{1/n_j} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

n gerade, die Teilfolge (a_{n_k}) mit n_k gerade

$$|a_{n_k}|^{1/n_k} = \left(\frac{1}{2^{n_k+1}}\right)^{1/n_k}$$

$$= \frac{1}{2^{1+1/n_k}} \to \frac{1}{2}$$

$\lim |a_n|^{1/n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konv.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/2^{n+1}}{1/2^{n+1}} = 1.$$

n gerade.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/2^{n+2}}{1/2^{n}} = \frac{1}{4}.$$

n = ungerade

$$\limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

$$\liminf\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{4}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\limsup \not< 1 \\ \liminf \not> 1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Quot. Krit. versagt.}$$

<u>Defn</u> Sei $(c_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Die <u>Potenzreihe</u> in $z \in \mathbb{C}$ ist

$$P(z) := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

<u>Bsp.</u> <u>Exponential Reihe</u>

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

mit $c_k = \frac{1}{k!}$

Konv. für alle $z \in \mathbb{C}$.

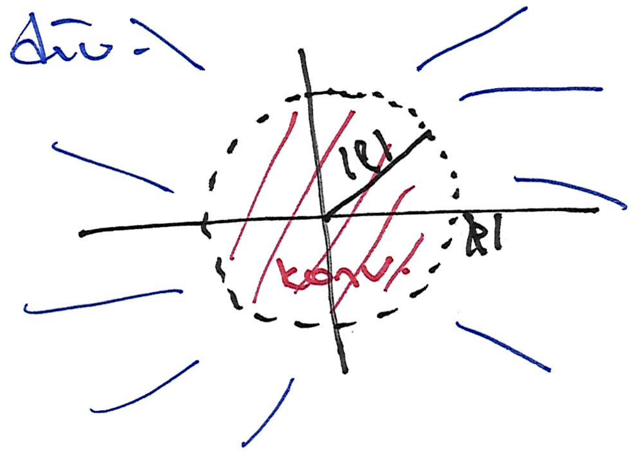
Satz Die Potenzreihe

$\sum c_k z^k$ konvergiert

absolute für alle $z \in \mathbb{C}$

mit $|z| < \rho$

wobei $\rho := \begin{cases} +\infty & \text{Falls } \limsup |c_k|^{1/k} = 0 \\ \dfrac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}} & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} \neq 0. \end{cases}$



$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ist divergent für

alle $|z| > \rho$

Konvention ① Falls $\{|c_k|^{1/k}, k \geq 1\}$ nicht beschränkt ist, setzen wir $\rho = 0$

② Falls $\{|c_k|^{1/k}, k \geq 1\}$ beschränkt ist und zudem $\limsup |c_k|^{1/k} = 0$ setzen wir $\rho = \infty$.

d.h die Potenzreihe $\sum c_k z^k$ konv. für alle $z \in \mathbb{C}$.

Defn Die Konvergenzbereich von eine Potenzreihe

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho \}$$

ist ein Kreis

Konvergenzkreis der Potenz Reihe.

Beweis (der Satz): sei $z \in \mathbb{C}$

$$\sum c_k z^k = \sum a_k$$

mit $a_k = c_k z^k$

Dann $|a_k|^{1/k} = |c_k|^{1/k} |z|$.

$$\limsup |a_k|^{1/k} = |z| \limsup |c_k|^{1/k}$$

Nach Wurzelkriterium

konv $\sum a_k$

falls $\limsup |a_k|^{1/k} < 1$

d.h falls $|z| \limsup |c_k|^{1/k} < 1$

d.h falls $\cancel{\limsup |c_k|}$

$$|z| < \underbrace{\frac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}}}_{=: \rho}.$$

Bsp.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{5n+2n^3}{2n+6n^3}\right)}_{c_n}{}^{n}$$

$$|c_n|^{1/n} = \left|\frac{5n+2n^3}{2n+6n^3}\right|$$

$$\longrightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3} < 1$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+2n^3}{2n+6n^3}\right)^n \quad \text{konv}$$

Bsp Riemann Zeta Funktion

Für $s > 0$ betrachten wir die Reihe

$$\zeta(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und fragen nach konvergenz.

In diesem fall funktionieren weder Quot.K noch WurzelK.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n}{n+1}\right|^s \to 1$$

$$|a_k|^{1/k} = \left|\frac{1}{k^s}\right|^{1/k}$$

$$= \left|\frac{1}{k^{1/k}}\right|^s \to 1.$$

Erinnerung:

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \dots$$

$$\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{} \dots$$

$$\geq 1 + 1 + 1 + \dots$$

Sei $s > 1$

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}}_{< \underbrace{\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s}}} + \underbrace{\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}}_{< \underbrace{\frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s}}} + \cdots$$

$$< 1 + \frac{2}{2^s} + \frac{2^2}{2^{2s}} + \frac{2^3}{2^{3s}} + \frac{2^4}{2^{4s}} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{2^{2s-2}} + \frac{1}{2^{3s-3}} + \cdots$$

$$= \underbrace{1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3 + \cdots}_{\text{Geometrische Reihe mit } q = 1/2^{s-1}}$$

Konvergiert die Geom. Reihe gegen $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}}$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{konv falls } |q| < 1 \\ \text{gegen } \dfrac{1}{1-q}. \end{cases} \right.$$

Mit Vergleichsatz die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ $s > 1$

konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}}$$

Falls $0 < s \leq 1$

$$\frac{1}{k^s} > \frac{1}{k}$$

Nochmals wenden wir

Vergleich Kr. an

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent ist,

divergent auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ falls

$0 < s \leq 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konv. falls} & s > 1 \\ \text{div. falls} & 0 < s \leq 1 \end{cases}$$

Zusammenfassung

Defn Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert falls die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert.

- Eine Reihe konvergiert absolute falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert
- Eine Reihe, die konvergent aber nicht absolut konv ist, heisst bedingt konvergent

Satz $\sum |a_k|$ konv $\Rightarrow \sum a_k$ konv

$\not\Leftarrow$

Bsp: $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ konv aber nicht abs. konv.

Satz $\sum a_k$ konv $\Rightarrow \lim a_k = 0$

d.h Falls $\lim a_k \neq 0 \Rightarrow \sum a_k$ divergiert

(Notwendige Bedingung für Konvergenz)

Satz. Sei $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq K$.

Dann ⓐ Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv., konv auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ⓑ Falls $\sum a_n$ divergiert, divergiert auch $\sum b_n$.

(Majoranten/Minoranten Kriterium).

Satz

$\sum a_k$ konv $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \geq 1$ s.d. $\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq N$.

(Cauchy Kriterium)

Satz (Dirichlet) Falls

$\sum a_k$ konvergiert absolute

dann jede Umordnung der Reihe konvergiert mit denselben Grenzwert

(Riemann) Falls $\sum a_k$ bedingt konvergiert dann gibt es zu jedem $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen A konvergiert

Satz (Leibniz) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine monotone fallende Folge mit $a_n \geq 0$ und $\lim a_n = 0$. Dann konvergiert die Alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k =: S$$

und $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

Satz Quotienten Kriterium

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$

a) Falls $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, dann konv. $\sum a_k$ absolute.

b) Falls $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ dann div $\sum a_k$ und $\sum |a_k|$

Satz (Wurzel Kriterium)

Sei $a_n \geq 1$ eine Folge

1) Falls $\limsup |a_n|^{1/n} > 1$ dann divergiert $\sum |a_n|$ und $\sum a_n$

2) Falls $\limsup |a_n|^{1/n} < 1$ dann konv $\sum a_k$ abs.

Bmk i) Falls $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

Dann $\sum a_n$ konv falls $L < 1$
div falls $L > 1$

2) Falls $\lim |a_n|^{1/n} = L$

$L < 1 \Rightarrow$ konv $\sum a_k$

$L > 1 \Rightarrow$ div $\sum a_k$

$L = 1 \Rightarrow$ versagt das Kriterium.

Bsp. ① <u>Geometrische Reihe</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \begin{cases} \text{konv} & \text{falls } |q|<1 \\ \text{div.} & \text{falls } |q|>1 \end{cases}$$

Falls konv., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

② <u>Harmonische Reihe</u>, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent

③ <u>Riemann zeta Funktion</u>.

Sei $s > 0$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \begin{matrix} \text{konv} & \text{falls} & s > 1 \\ \text{div} & \text{falls} & s \leq 1 \end{matrix}$$

④ <u>Teleskope Reihe</u> Sei $(b_n)_{n\geq 0}$ eine Folge

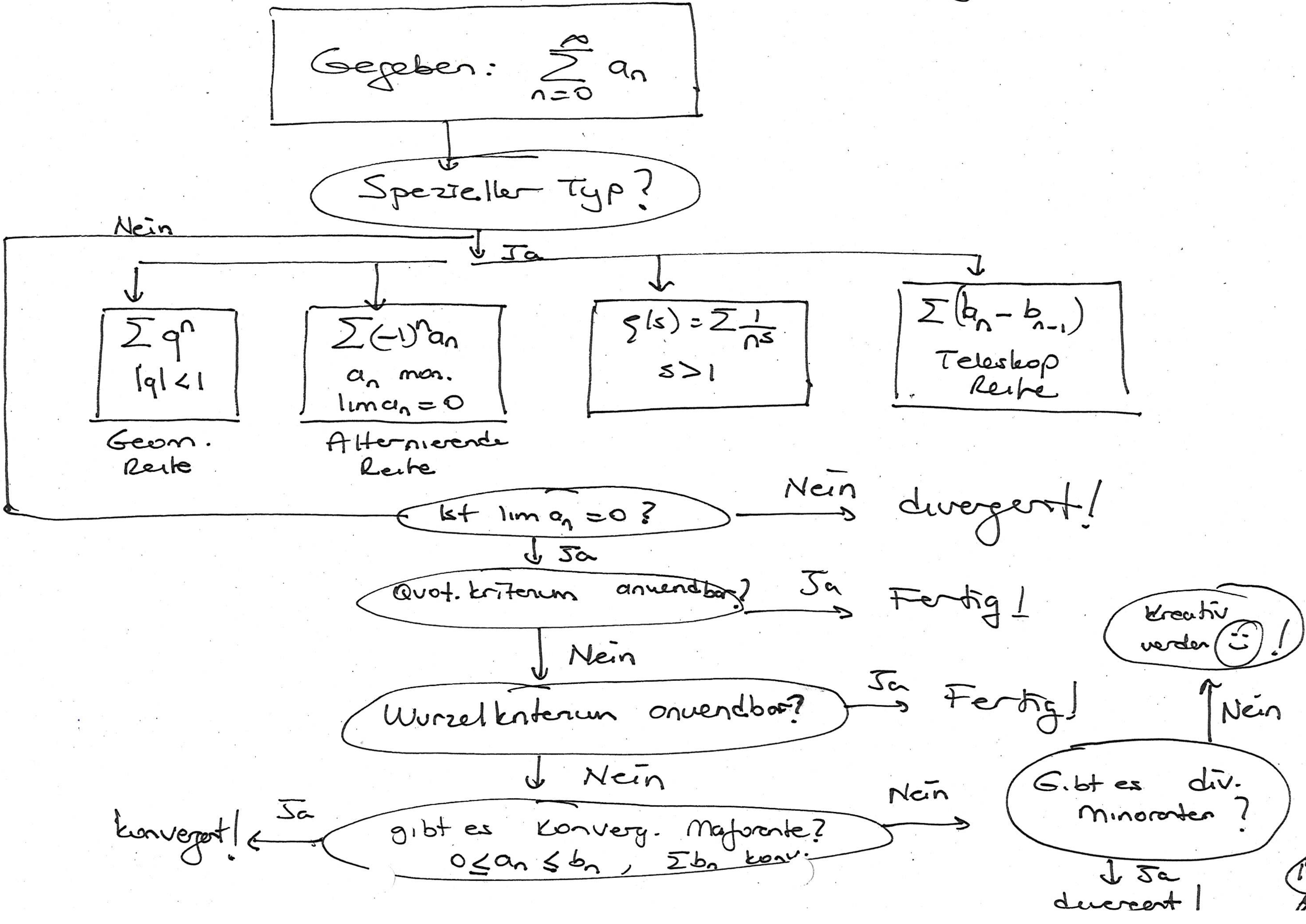
$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1})$$

$$S_n = \cancel{b_1} - b_0 + \cancel{b_2} - \cancel{b_1} \cdots + b_n - \cancel{b_{n-1}}$$

$$= b_n - b_0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1}) = \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) - b_0 .$$

Zur Untersuchung unendlicher Reihen auf Konvergenz oder Divergenz



- **Doppelreihen und**
Multiplikation von 2 Reihen

$$\sum_{k,l} c_{kl} = ?$$

Sei $(c_{kl})_{\substack{k\geq 0\\ l\geq 0}}$ eine Doppelfolge

$$\begin{array}{cccccc}
c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & \cdots \\
c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots \\
c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
U_0 & U_1 & & &
\end{array}$$

$c_{00} + c_{10} + c_{20} + \cdots = U_0$

$c_{01} + c_{11} + c_{21} + \cdots = U_1$

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_{0l} = c_{00} + c_{01} + \cdots = S_0$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_{1l} = c_{10} + c_{11} \cdots = S_1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{kl} = \sum_{l=0}^{\infty} U_l .$$

$$
\begin{array}{cccccc|l}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & S_0 = 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & S_1 = 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & S_2 = 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \cdots & \quad \vdots \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & + \quad 0.
\end{array}
$$

$$1 + 0 + 0 \cdots = 1.$$

$$(1 + 1 + \cdots) + (-1 - 1 - \cdots - 1) + 0 + \cdots + 0$$

$$\infty - \infty \; ?$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - \cdots = ?$$

Defn $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist eine

lineare Anordnung der

Doppelreihe $\sum_{\substack{k\geq 0 \\ \ell \geq 0}} c_{k,\ell}$

falls eine Bijektion

gibt $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$
$\quad j \longrightarrow (k,\ell)$

mit $b_j = c_{\phi(j)}$.

Satz (Cauchy) wir

nehmen an dass es $B \geq 0$

gibt so dass

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |c_{ij}| \leq B$$

$\forall m$ (B hängt nicht von m ab).

Dann konvergieren die

folgenden Reihen

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} \quad \forall i$$

$$U_j := \sum_{i=0}^{\infty} c_{ij} \quad \forall j$$

sowie $\sum_{i=0}^{\infty} S_i$ und

$\sum_{j=0}^{\infty} U_j$ und es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_{ij}$$

zudem konvergiert
jede lineare Anordnung
der Doppelte Reihe
absolute mit selbem Grenzwert

Jetzt konnen wir das
Produkt zweier Reihen
behandeln. Wir möchten

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad \text{mit} \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

multiplizieren. $\left(\sum_i a_i\right)\left(\sum_j b_j\right) = ?$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{a_i b_j}_{c_{ij}} =: ?$$