Potenzreihen

Sei $(c_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die Potenzreihe in $z \in \mathbb{C}$ ist

$$P(z) := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_k z^k + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Bsp Exponential Reihe

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

konv. abs. für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert absolute für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$

wobei $\rho := \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}} & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} \neq 0 \\ \infty & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} = 0 \end{cases}$

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ divergiert für alle $|z| > \rho$.

Konvention: Falls $\{ |c_k|^{1/k} : k \in \mathbb{N} \}$ nicht beschränkt ist, setzen wir $\rho = 0$.

Defn Konvergenzkreis

Die Konvergenzbereich von eine Potenzreihe $\boxed{\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho \}}$ ist ein Kreis, Konvergenzkreis der Potenzreihe

Doppelreihen und Produkt von 2 Reihen

Sei $(c_{k\ell})_{\substack{k\geq 0\\ \ell\geq 0}}$ eine Doppelfolge

$$\begin{matrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \cdots \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Sei
$$s_0 = c_{00} + c_{01} + \cdots = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{0\ell}$$
$$s_1 = c_{10} + c_{11} + \cdots = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{1\ell}$$
$$\vdots$$
$$s_k = c_{k0} + c_{k1} \cdots = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k\ell}.$$

Sei
$$u_0 = c_{00} + c_{10} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k0}$$
$$u_1 = c_{01} + c_{11} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k1}$$
$$\vdots$$
$$u_\ell = c_{0\ell} + c_{1\ell} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k\ell}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} u_\ell.$$

Bsp

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & & s_0 = 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & & s_1 = 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & s_2 = 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \end{matrix}$$

$$\sum s_k = 0$$

$u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_2 = 0 \ \cdots$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} u_\ell = 1.$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k\ell}}_{0} \neq \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k\ell}}_{1}$$

Defn $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist eine

lineare Anordnung der

Doppelreihe $\sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl}$

falls eine Bijektion

gibt $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$j \mapsto (k, l)$

mit $b_j = c_{\phi(j)}$

Satz (Cauchy) Wir nehmen an dass es $B > 0$ gibt so dass

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |c_{ij}| \leq B \quad \forall m$$

(B hängt nicht von m ab!)

Dann konvergieren die

Folgenden Reihen absolute

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} \quad \forall i$$

$$U_j := \sum_{i=0}^{\infty} c_{ij} \quad \forall j$$

Sowie $\sum_{i=0}^{\infty} S_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} U_j$

und es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

d.h. $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_{ij}$

zudem konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelte Reihe absolute mit selben Grenzwert

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right), \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) \qquad \sum_{i,j} a_i b_j$$

Wir müssen eine Art finden die Einträge der unendliche Matrix $(c_{ij} := a_i b_j)$

$$\begin{matrix} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \cdots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots \\ a_2 b_0 & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Defn Das Cauchy Produkt der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right)$$

$$= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \cdots$$

Warum solche Produkt?

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m.$$

$$P(z)Q(z) = R(z)$$

$$a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) z$$

$$+ (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) z^2$$

$$+ \dots + a_n b_m z^{n+m}.$$

Im Alg. für zwei Potenzreihen

$$P(z) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

$$Q(z) := \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$$

$$P(z)Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j z^{i+j}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Big(\sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} a_i b_j \Big)} z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \Big) z^n.$$

Vorsichtig!

Das Cauchy Produkt muss nicht immer konvergieren!

Betrachte die Folge

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = b_k$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right)}^{c_n}$$

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right| = \left|\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{\sqrt{n-j+1}} \cdot \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}}\right|$$

$$= |c_n|$$

$$\left|\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-j+1}\,\sqrt{j+1}}\right| = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-j+1} \cdot \sqrt{j+1}}$$

$j \leq n$.

$$(n-j+1)(j+1)$$

$$\leq (n+1)\ (n+1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n-j+1}\,\sqrt{j+1}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \geq (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$$

$$= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{n+1}{n+1} \geq 1$$

$\Rightarrow |c_n| \geq 1 \Rightarrow \sum_n c_n$ ist divergent

Vorsichtig! Man kann auch sein dass,

$\sum a_n$, $\sum b_n$ divergieren

aber das Cauchy Produkt konvergiert!

Siehe Serie 6.

Satz Falls die Reihen

$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)$ $\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$ abs. konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\, b_j\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i\, b_j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, b_j$$

***

Satz: $\forall\, x, y \in \mathbb{C}$

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Beweis $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

obs. konv. $\forall x \in \mathbb{C}$

$$\exp(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!}$$

$$\exp(x)\,\text{exy}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{y^l}{l!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{n-k!} \right)$$

z.z. $\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$

$$\stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}.$$

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

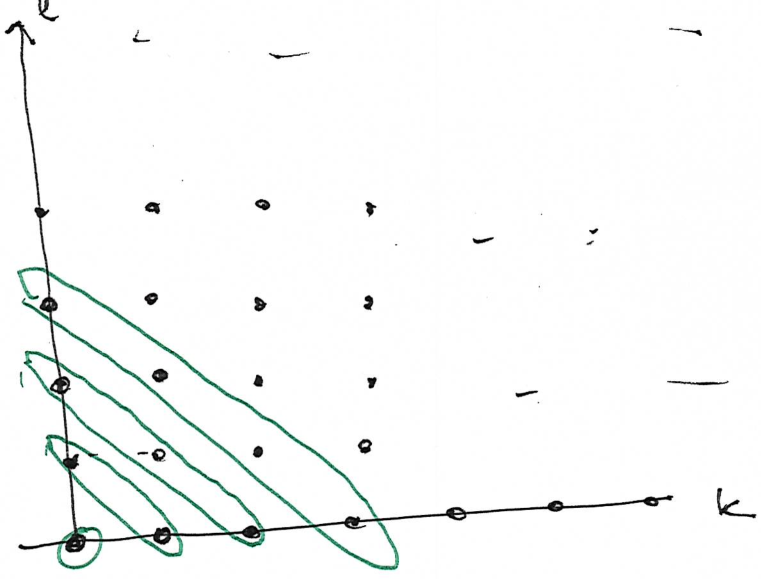
Binomial Satz

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\text{RHS} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{n!} \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} \binom{n}{k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n$$

$$= \exp(x+y)$$



Zum Abschluss möchten wir Zusammenhang zwischen

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

und

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Satz Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Folge

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n_{n\geq 1}$$

und

$$\lim\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

Insbesondere

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

Bsp.
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}i\right)^k}{k!} = \exp\left(\frac{\pi}{2}i\right). = i$$

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i = i$$

Wir schreiben eine Folge als eine Funktion

$$f = \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$k \longrightarrow f(k)$$

und ~~betrachten~~ wir folgen von Folgen!

Satz Für jedes n, sei

$$f_n = \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$k \longrightarrow f_n(k)$$

eine Folge

$$(f_n)_n = (f_1, f_2, f_3 \cdots)$$

eine Folge von Folgen.

Wir nehmen an dass

1) $\lim_{n\to\infty} f_n(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$

$j=1$

$f_1(1)$
$f_2(1)$
$\vdots$
$f_n(1)$
$\vdots$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(j) =: f(j)$$

2) Es gibt eine Funktion

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow [0, \infty)$$

s.d. a) $|f_n(j)| \leq g(j)$ $\forall j \geq 0$ $\forall n \geq 0$.

b) $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert.

Dann folgt dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)$$

d.h

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \lim f_n(j)$$

~~Man~~ kann "Σ" und "lim"

~~[illegible]~~ vertauschen.

$$\begin{array}{ccccc} f_1(1) & f_1(2) & \cdots & f_1(k) \cdots & (f_1(k))_{k\geq 1} \\ f_2(1) & f_2(2) & \cdots & f_2(k) & (f_2(k))_{k\geq 1} \\ \vdots & & & \vdots & \\ f_n(1) & f_n(2) & & f_n(k) & (f_n(k))_{k\geq 1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Beweis $\left(\exp(z) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right)$.

Sei $z \in \mathbb{C}$ fest

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{z}{n}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} z^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}.$$

Sei $f_n(k) := \begin{cases} \dfrac{z^k}{k!} \dfrac{n!}{(n-k)!\,n^k} & 0 \le k \le n \\ 0 & k \ge n+1 \end{cases}$

Dann $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k)$

$$\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}.$$

$$= \left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right) \cdots \left(\frac{n-k+1}{n}\right).$$

$$= 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Als $n \to \infty$

$$\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \to 1.$$

und $\left| \dfrac{n!}{(n-k)!\,n^k} \right| \le 1$

d.h

$$|f_n(k)| = \left|\frac{z^k}{k!}\right| \left|\frac{n!}{(n-k)!\, n^k}\right|$$

$$\leq \frac{|z|^k}{k!} =: g(k)$$

und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(k) \to \frac{z^k}{k!} =: f(k)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \quad \text{konv} \quad \forall z$$

Aus Obere Satz folgt dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

$$\stackrel{!}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Satz Für jede n, sei

$$f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad \text{eine Folge}$$
$$k \to f_n(k)$$

$$f_n(k) := \begin{cases} \frac{z^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!\, n^k} & 0 \le k \le n \\ 0 & k \ge n+1 \end{cases}$$

s.d. $\sum_{k=0}^{\infty} f_n(k) = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{z}{n}\right)^k$

Wir nehmen an dass

1) $\lim_{n\to\infty} f_n(k) =: f(k)$

existiert $\forall\, k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \cdots n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{z^k}{k!} 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$
$$= \frac{z^k}{k!} =: f(k)$$

2) Es gibt eine Funktion

$$g: \mathbb{N} \to [0,\infty)$$

s.d.

$$g(k) := \frac{|z|^k}{k!}$$

a) $|f_n(k)| \le g(k) \quad \forall k \ge 0 \; \forall n \ge 0$

$$|f_n(k)| = \left|\frac{z^k}{k!}\right| \left|\frac{n!}{(n-k)!\, n^k}\right| \le \left|\frac{z^k}{k!}\right| =: g(k)$$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} g(k)$ konvergiert

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$ konvergiert.

Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} =: \exp(z)$$

Clicker Frage

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n}{n^{3/2}}}_{n\sqrt{n}} z^n$$

$$c_n = \frac{2^n}{n^{3/2}}$$

$$\limsup |c_n|^{1/n}$$

$$= \limsup \frac{|2|}{|n^{1/n}|^{3/2}}$$

$$= \lim \frac{2}{|n^{1/n}|^{3/2}} = 2$$

Reihe konv abs for

$$|z| < \frac{1}{2}$$

$$\rho = \frac{1}{\limsup |c_n|^{1/n}}.$$

Auf dem Rand $|z| = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2^n}{n^{3/2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \text{ konv.}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konv falls $|z| < 1$

div for $|z| \geq 1$

§3 Stetige Funktionen

§3.1 Reelwertige Funktionen

Sei D eine Menge

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

Sei $\mathbb{R}^D := \{ f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ eine Funktion} \}$.

$$\parallel$$

$\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$

die Menge die auf D definierte reelwertige Funktionen.

Sind $f, g \in \mathbb{R}^D$, $\lambda \in \mathbb{R}$, so definiert man die Addition und skalare Multiplikation durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda . f(x)$$

Die Menge aller Funktionen in $\mathbb{R}^D$ bildet ein Vektorraum über $\mathbb{R}$

Die Null Funktion, die immer den wert 0 annimmt

$$\mathcal{O}(x) = 0 \qquad \forall x \in D$$

ist der Null vektor

$$(f+\mathcal{O})(x) = f(x) + \mathcal{O}(x) = f(x) + 0$$
$$= f(x)$$

Das Produkt von 2 Funktionen

$f, g \in \mathbb{R}^D$ ist definiert durch

$$(fg)(x) := f(x)g(x)$$

Für die konstante Funkt $1(x) := 1$
$\forall x \in D$

gilt $1 \cdot f = f$

Sind $f, g \in \mathbb{R}^D$

$D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$,

so definiert man den Quotienten

$\frac{f}{g} : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Def^n (Komposition von Funktionen)

Seien $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$f(D) \subset E$

Die Komposition von g nach f (Verknüpfung oder Verkettung) g und f ist die

Funktion $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto g(f(x))$$

Defn Sei $f: D \to \mathbb{R}$

1) f ist nach oben (nach unten) beschränkt falls die Menge der Bilder

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}$$

nach oben (nach unten) beschränkt ist

2) f ist beschränkt falls $f(D)$ beschränkt ist

3) $f: D \to \mathbb{R}$ strikt mon. wachsend falls $\forall x, y \in D$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

4) $f: D \to \mathbb{R}$ strikt monotone fallend falls $\forall x, y \in D$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$