Konvergenz von Funktionenfolgen

$f_n : D \to \mathbb{R}$

Defn Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ falls für alle $x \in D$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

f heisst der Punktweise Grenzwert von f_n

$\boxed{f_n \xrightarrow[\text{punktweise}]{} f}$ falls gilt

$$\boxed{\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}$$

Bsp $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^n$

konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$(f_n)_{n\geq 1}$ sind stetige Funktionen aber der Grenzwert Funktion f ist nicht stetig

Defn. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmässig in D gegen $f : D \to \mathbb{R}$ falls gilt

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 1 \text{ so dass } \forall n \geq N,\ \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}$$

$f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$

Satz Sei $D \subseteq \mathbb{R}$

$f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funk.-folge bestehend aus in D stetigen Funktionen. Falls f_n konvergiert gleichmässig gegen ein Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, dann ist f in D stetig.

d.h Gleichmässigkonvergenz bewahrt die Stetigkeit!

Satz (Cauchy Kriterium)

Die Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{R}$ konv. glm. in D $\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \geq 1$ s.d.

$\forall n, m \geq N$ und $\forall x \in D$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Bmk $f_n \xrightarrow[\text{glm}]{} f \Longleftrightarrow$

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Defn Sei $(f_n)_{n \geq 1}$ eine Funktionenfolge. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig in D, falls die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Satz $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an dass $|f_n(x)| \leq c_n$ $\forall x \in D$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konv. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmässig in D und deren Grenzwert

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ist eine in D stetige Funktion

Zum Erinnerung:

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

ist eine Reihe für

die Funktionen Folge

$f_k(x) = c_k x^k$.

Satz

$\sum c_k x^k$ konvergiert absolute

für alle $|x| < \rho$

wobei $\rho = \begin{cases} \infty & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} = 0 \\ \dfrac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}} & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} > 0. \end{cases}$

ρ = Konvergenz Radius der Potenzreihe

Satz Sei $D \subset \mathbb{R}$

~~und~~ Sei $\sum c_k x^k$

eine Potenzreihe.

mit Positiven Konvergenz Radius $\rho > 0$.

und sei

$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \ |x| < \rho$

Dann gilt $\forall\ 0 \leq r < \rho$

konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

gleichmässig auf $[-r, r]$

Insbesondere ist

$f : (-\rho, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$

stetig.

Bmk. Die Potenzreihen sind stetige Funktionen in ihrem Konvergenzbereich.

Beweis Sei $f_k(x) = c_k x^k$

Dann ist $f_k(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Für $|x| \leq r < \rho$ gilt

$$|f_k(x)| = |c_k x^k| \leq c_k r^k$$

$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$ konvergiert abs da $r < \rho$ ist

Aus der Obigen Satz folgt dass $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ auf $[-r, r]$ gleichmässig konvergiert.

Insbesondere die Grenzwert $f: [-r, r] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Da dies für aller $r < \rho$ gilt, folgt dass $f: (-\rho, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

Bsp. $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konv.

für alle x, und definiert eine stetige Funktion $\forall x \in \mathbb{R}$

§3.8 Trigonometrische Funktionen

Wir definieren die Sinusfunktion

für $z \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Aus Quotientenkriterium folgt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{z^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{z^{2n+1}}\right|$$

$$= |z^2| \left|\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Deswegen konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Wir definieren für $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Aus Quot. Kriterium folgt dass $\cos z$ konvergiert abs. für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$

und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

sind stetig $\forall x \in \mathbb{R}$

Satz ① $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$

$\forall z \in \mathbb{C}$

② $\cos z = \cos(-z)$ gerade funktion.

(Eine Funktion f heisst gerade

falls $f(z) = f(-z)$

$\forall z \in \mathbb{C}$).

~~sinz~~ $\sin(-z) = -\sin z$

ungerade funktion!

③ $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

④ $\sin(z+w) = (\sin z)(\cos w) + (\cos z)(\sin w)$

$\cos(z+w) = (\cos z)(\cos w) - (\sin z)(\sin w)$

Insbesondere

$(\sin 2z) = 2 \sin z \cos z$

$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

⑤ $\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Beweis

$$\exp(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}}_{=: \cos z} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{=: \sin z}$$

$$= \cos z + i \sin z$$

(2) Folgt aus der definitionen.

(3) Folgt aus (1) (4) (2) und defn.

(4) $e^{iz} \cdot e^{+iw} = e^{i(z+w)}$

d (1).

$$(\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w)$$

$$= \cos(z+w) + i \sin(z+w)$$

Ausmultiplizieren $\Rightarrow$

$$(\cos z)(\cos w) + (i \sin z)(i \sin w)$$

$$= \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

$$= \cos(z+w)$$

$$i \sin z \cos w + i \cos z \sin w = i \sin(z+w)$$

(5) Setze $z = -w$ Additions Formel für $\cos(z+w)$

gibt $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

§3.9 Die Kreiszahl π

$$\sin x := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$\sin 0 = 0$

Sei $x > 0$

Erinnern:

Satz (Leibniz) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ $(a_n > 0)$ mon. fallend, $\lim a_n = 0$

Dann $a_1 - a_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \leq a_1$

Frage Für welche $x > 0$ ist $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ mon. fallend.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0. \text{ Für } x \text{ fest}$$

Ant $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ist mon fallend

$$\iff \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{(2n-1)!(2n)(2n+1)} \leq \frac{x^{-1}}{(2n-1)!}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq (2n)(2n+1) \quad \forall n \geq 1$$

Also dann

$$x^2 \leq (2\cdot 1)(2\cdot 1+1) = 6.$$

Für $0 < x \leq \sqrt{6}$

$$(a_n) = \left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \text{ ist}$$

monotone fallend.

Lemma. $\forall\ 0 < x \leq \sqrt{6}$

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x$$

$\to$ Bild.

Defn. Die Kreiszahl π ist definiert als die kleinste (von Null verschiedene) Nullstelle der Sinus Funktion

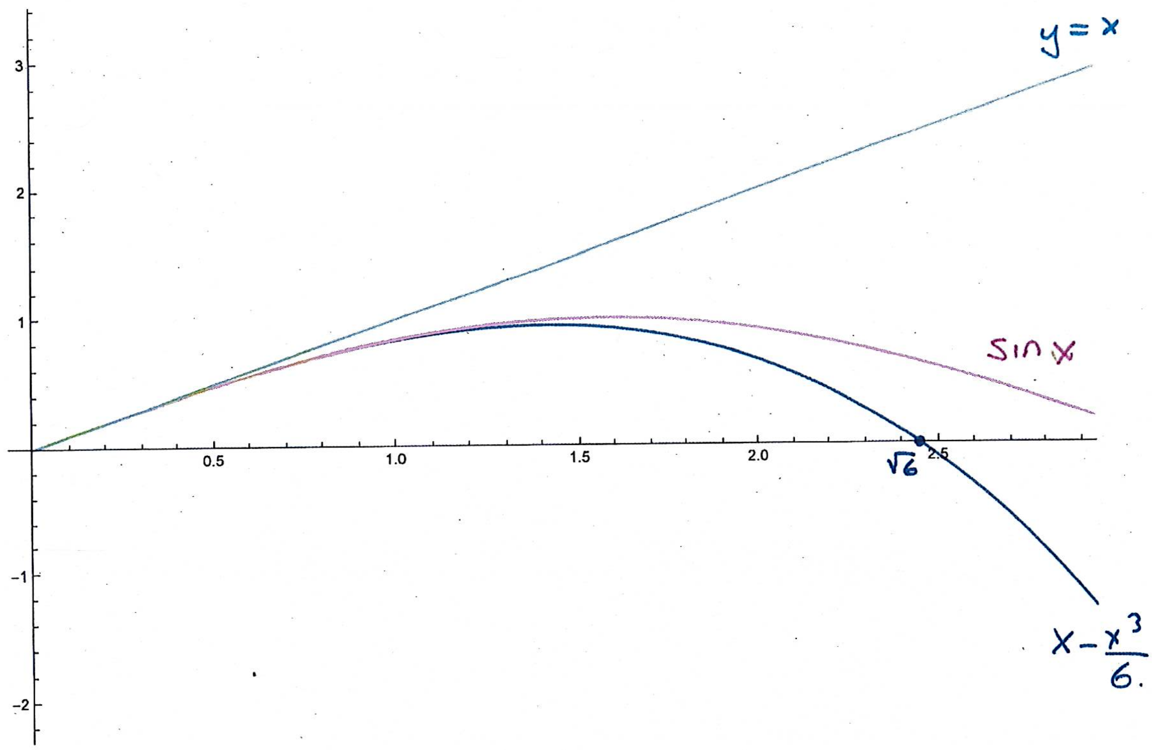
Satz Die Sinusfunktion hat auf $(0, \infty)$ mindestens eine Nullstelle

Sei $\pi := \operatorname{Inf} \{t > 0 \mid \sin t = 0\}$

Dann gilt

```
In[2]:= Plot[{x - x^3 / 6, Sin[x], x}, {x, 0, Pi}]
```

Out[2]=



10

① $\sin \pi = 0$ und $\pi \in (2,4)$

② $\forall x \in (0,\pi)$, $\sin x > 0$

③ $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Beweis Idee: ①.

ⓐ $\sin x > 0$ $\forall x \in (0,2]$

insbesondere $\sin 2 > 0$

$\forall x \in [0,\sqrt{6}]$

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right).$$

$\forall x \in (0,\sqrt{6}]$, $x\left(1-\frac{x^2}{6}\right) > 0$

$\Rightarrow$ $\forall x \in (0,2]$

$\sin x \geq x\left(1-\frac{x^2}{6}\right) > 0$

ⓑ $\sin 4 < 0$. Übung

Da $\sin x$ stetig ist mittels Zwischenwertsatz, ~~sinx~~ hat $\sin x$ mindestens eine Nullstelle zwischen $(2,4)$

d.h. $\{t > 0 \mid \sin t = 0\} \neq \emptyset$

und damit $\operatorname{Inf}\{t>0 \mid \sin t = 0\}$ existiert. Nennen wir diese Infimum π. Dann

$$2 < \pi < 4.$$

Aus stetigkeit von $\sin x$

folgt das $\sin \pi = 0$

Sei (t_n) eine Folge in

diese Menge mit $\lim t_n = \pi$

Dann

$$\sin \pi = \sin(\lim t_n) = \lim(\sin t_n) = \lim 0 = 0.$$

② z.z. $\forall x \in (0,\pi)$, $\sin x > 0$.

Auf $(0,\pi)$, $\sin x$ hat keine

Nullstelle da $\pi = \inf\{t>0 \mid \sin t = 0\}$

Nun $0 < 1 < 2 < \pi$

nach ①.

$$\sin 1 \geq 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6} > 0.$$

Falls es $y \in (0,\pi)$ gibt

mit $\sin y < 0$, $y < \pi$

dann würde $\sin 1 > 0$

und dem ZWS folgt

die existenz eine Nullstelle

$z \in (1, y)$

d.h ein $z \in (1,y)$ mit $\sin z = 0$

Insbesondere $z < y < \pi$

ein Wiederspruch zur minimalitat von π ! ///

③ z.z $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

Sei $x = \frac{\pi}{2}$

$\underbrace{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)}_{\underbrace{\sin\pi}_{0}} = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}$

$0 = 2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}$

Da $\frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$

mit ② $\sin\frac{\pi}{2} > 0$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0.$

Aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$

$\sin\frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$e^{i\pi/2} = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = i$

Kor ① $e^{i\pi} = -1$ $\quad e^{2\pi i} = 1$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

② $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

③ $\sin(x + \pi) = -\sin x$

~~cos (x +~~

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$

④ $\cos(x + \pi) = -\cos x$

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$

(5) Nullstellen von

$\sin x = \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$\sin x > 0$, $\forall x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$
$\forall k \in \mathbb{Z}$

$\sin x < 0$, $\forall x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$,
$\forall k \in \mathbb{Z}$

(6) Nullstellen von

$\cos x = \{ \frac{\pi}{2} + k \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

$\cos x > 0$ $\forall x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi)$

$\cos x < 0$ $\forall x \in (-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi)$.

Defn Für $z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ definieren wir Tangensfunktion

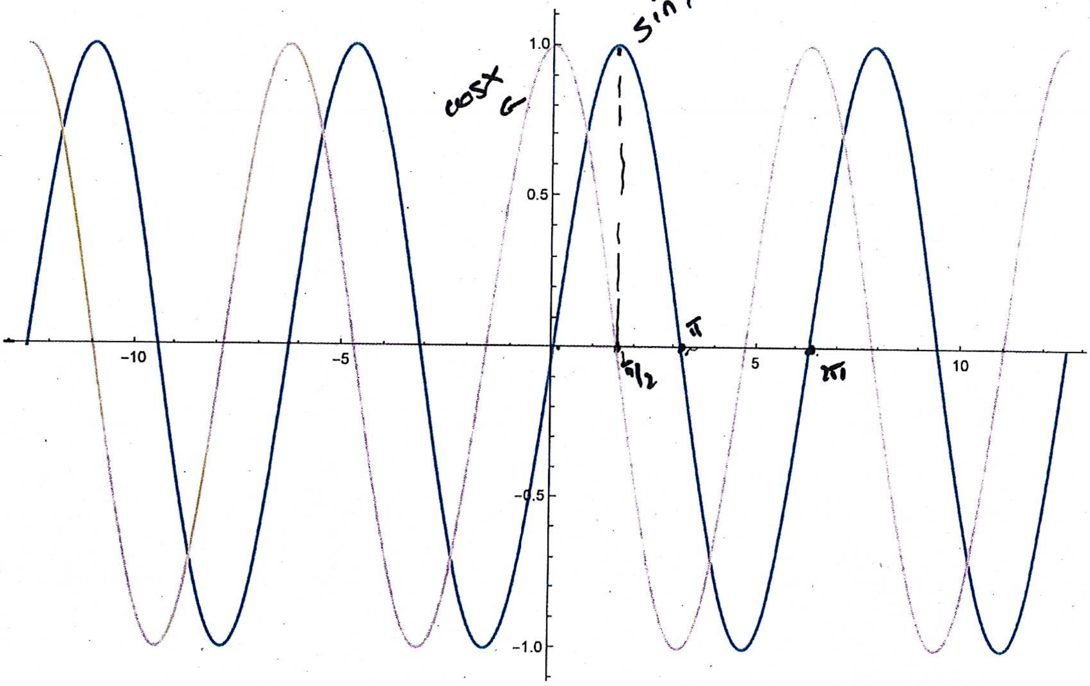
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Für $z \neq \pi k$ cotangensfunkt

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

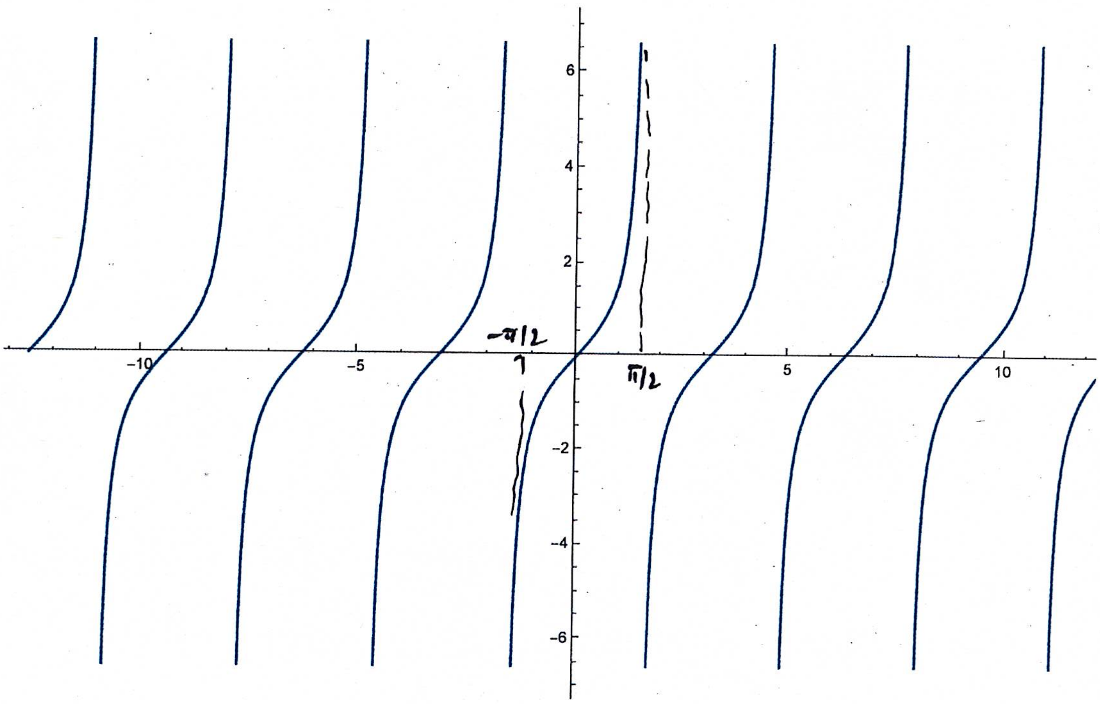
In[ ]:= `Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, -4 Pi, 4 Pi}]`

Out[ ]=



In[ ]:= `Plot[Tan[x], {x, -4 Pi, 4 Pi}]`

Out[ ]=



7/15

6-1

Clicker Frage

$$f_n(x) = \frac{n}{nx+1}$$

$$f_n(x) : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{n}{nx+1} \right| \qquad x \in (0,1)$$

$$|f_n(x)| < n$$

(2) $$f_n(x) = \frac{n}{nx+1} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(x+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{x+\frac{1}{n}}$$

Für jede x

$$f_n(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{x}$$

(3) $f_n \xrightarrow[glm]{} f$ X.

Satz Falls (f_n) eine Folge von beschränkte Funktionen und $f_n \xrightarrow[glm]{} f$ dann ist f auch beschränkt.

---

f_n ist beschränkt

aber $\frac{1}{x}$ ist nicht beschränkt

$$f_n \not\xrightarrow[glm]{} \frac{1}{x}$$