Trigonometrische Funktionen

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Satz ① $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$

und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$

sind stetig $\forall x \in \mathbb{R}$

② $e^{iz} = \cos z + i \sin z$
$\forall z \in \mathbb{C}$

③ $\cos(z) = \cos(-z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$
$\sin(z) = -\sin(-z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

④ $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

⑤ $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

$\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$
$\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$

⑥ $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

Lemma $\forall \; 0 \le x \le \sqrt{6}$

$$x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$$

Satz Die Sinusfunktion

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sin x$$

hat auf $(0,\infty)$ mindestens eine Nullstelle. Sei

$$\boxed{\pi := \operatorname{Inf}\{t>0 \mid \sin t = 0\}}$$

Dann gilt (a) $\sin \pi = 0$

$\pi \in (2,4)$

(b) $\forall\, x \in (0,\pi)$, $\sin x > 0$

(c) $e^{i\pi/2} = i$

$\left(\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1\right)$

Kor (1) $e^{i\pi} = -1 \qquad e^{2\pi i} = 1$

(2) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

(3) $\sin(x+\pi) = -\sin x$

$\sin(x+2\pi) = \sin x$

(4) $\cos(x+\pi) = -\cos x$

$\cos(x+2\pi) = \cos x$

(5) Nullstellen von $\sin x$

$= \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Nullstellen von $\cos x$

$= \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Defn Für $z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ definieren wir die <u>Tangensfunktion</u> $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$

Für $z \neq \pi k$, definieren wir die <u>Cotangensfunktion</u> $\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$.

§ 3.10 Grenzwert von Funktionen

$f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Falls $x \to x_0$, was passiert mit $f(x)$?

$x_0 \notin D$ ist möglich.

Defn $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt von D

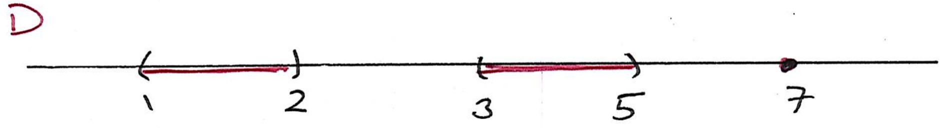
falls $\forall \delta > 0$

$$[(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}] \cap D \neq \emptyset$$

jedes Interval um x_0 hat mindestens einen Punkt in D, der nicht x_0 ist.

$D' :=$ Menge aller Häufungspunkte

Bsp $D = (1,2) \cup (3,5) \cup \{7\}$



$D' = [1,2] \cup [3,5]$

$\forall \delta < 2 \quad [(7-\delta, 7+\delta) \setminus \{7\}] \cap D = \emptyset$

Deswegen $7 \notin D'$.

jedes Punkt zwischen 2 und 3, $x \in (2,3)$ ist kein Häufungspunkt.

Sei $\delta = \dfrac{\min(x-2, x-3)}{2}$, dann

$$(x-\delta, x+\delta) \cap \{x\} \cap D = \emptyset$$

Analog jedes Punkt $x \in (3,5)$ ist kein Häufungspunkte

Sei $\delta = \dfrac{\min(x-3, x-5)}{2}$.

§3.10 Grenzwerte von Funktionen

$f: D \to \mathbb{R}$

Falls $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$

was passiert mit $f(x)$?

$x_0 \notin D$ ist möglich.

Defn $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein **Häufungspunkt von D**

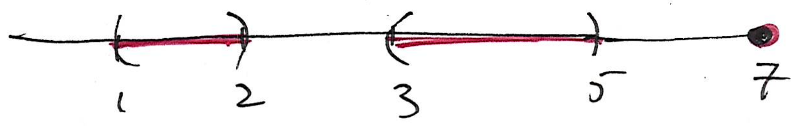
falls $\forall \delta > 0$

$$\big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}\big) \cap D \neq \emptyset$$

Jedes Interval um x_0 hat mindestens einen Punkt in D, der nicht x_0 ist

Bsp.

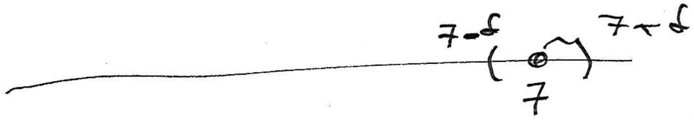
$$D = (1, 2) \cup (3, 5) \cup \{7\}$$



$D' :=$ Menge aller Häufungspunkte von D.

$$D' = [1, 2] \cup [3, 5]$$

$\forall$ alle $\delta < 2$



$$\big((7-\delta, 7+\delta) \setminus \{7\}\big) \cap D = \emptyset.$$

jede punkt zwischen 2 und 3 $x \in (2, 3)$, kann man $\delta = \min(2-x, 3-x)$

Dann $(x-\delta, x+\delta)\setminus\{x\} \cap D = \emptyset$.

Defn Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, ein Häufungspunkt von D (ie $x_0 \in D'$). Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0 ($x \to x_0$), bezeichnet mit $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

falls $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.d. $\forall x \in D \cap \left((x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}\right)$

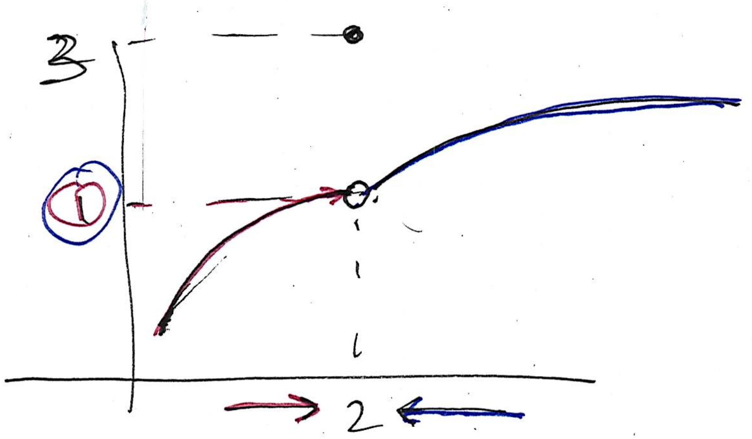
$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$f: D \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in D$ stetig falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.d. $\forall x \in D$, $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Bmk ① Der Grenzübergang $x \to x_0$ bedeutet: x kommt der Stelle x_0 beliebig nahe ohne sie jedoch jemals zu erreichen.

② f an der Stelle x_0 muss nicht definiert sein



$\lim_{x \to 2} f(x)$ existiert

$\lim_{x \to 2} f(x) = 1 \neq 3 = f(2)$

Grenzwert an der Stelle $x = 2$ existiert aber

$f(x)$ ist nicht stetig in $x = 2$, da $f(2) = 3$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ und $1 \neq 2$.

③ $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

$\iff \forall (a_n)_{n \geq 1} \subset D \setminus \{x_0\}$

mit $\lim a_n = \cancel{x}_0$.

$\lim f(a_n) = A$

(f ist in x_0 stetig

$\iff \forall (a_n)_{n \geq 1} \subset D$, $\lim a_n = x_0$

$\lim f(a_n) = f(x_0) = f(\lim a_n)$)

(4) Sei $x_0 \in D$.

f ist in x_0 stetig

$\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\iff$ (a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ existiert

<u>und</u> (b) $A = f(x_0)$.

(5) Falls f ist in x_0 stetig

dann $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert.

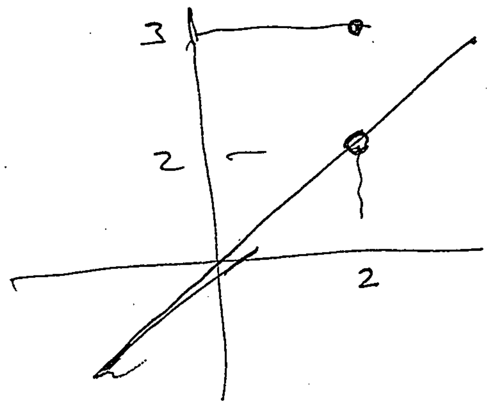
(6) Sei $x_0 \in D$, $\lim_{x \to x_0} f(x)$

kann existieren und f bei

x_0 ~~dann~~ definiert sein

ohne dass f bei x_0 stetig ist

z.B. $f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \neq 2 \\ 3 & \text{falls } x = 2 \end{cases}$



$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 \neq f(2) = 3$

Grenzwert an der Stelle $x = 2$ existiert, f ist in $x = 2$ definiert aber f ist nicht stetig in $x = 2$.

Satz Falls $f, g: D \to \mathbb{R}$

und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$

existieren dann

$$\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to x_0} f \pm \lim_{x \to x_0} g = A \pm B.$$

$$\lim (fg) = (\lim f)(\lim g) = AB.$$

Satz (Sandwich Satz)

Falls $g_1(x) < f(x) < g_2(x)$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_2(x) = A$

Dann existiert auch

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Bsp. Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Dann $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Beweis: Für $0 < x \leq \sqrt{6}$

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x$$

$$x \neq 0 \qquad \boxed{1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1} \quad (*)$$

Da x^2, $\frac{\sin x}{x}$ gerade Funktionen sind.

diese Ungleichung $(*)$ gelten auch für $-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$, $x \neq 0$.

$$\underbrace{1 - \frac{x^2}{6}}_{\substack{x \to 0 \downarrow \\ 1}} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \underbrace{1}_{\substack{\downarrow x \to 0 \\ 1}}$$

Nach Sandwich Satz

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$$

Linkseitige und Rechsseitige Grenzwerte.

Defn Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. ~~$x_0 \in D$~~ Wir nehmen an dass x_0 ein Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$.

Falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion $f|_{D \cap (x_0, \infty)}$ für $\underset{x \in D \cap (x_0, \infty)}{x \to x_0}$ existiert.

wird er mit $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

bezeichnet und nennt

sich <u>rechtseitiger Grenzwert</u>

von f, bei x_0.

Analog falls der Grenzwert

der Funktion $f\Big|_{D\cap(-\infty,x_0)}$

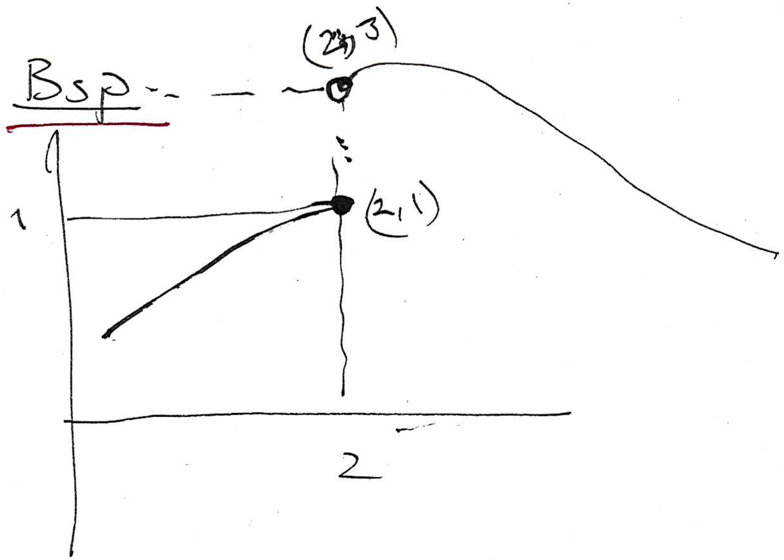
für $x\to x_0$ existiert wird

er mit $\underline{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)}$ bezeichnet

und nennt sich <u>linkseitiger</u>

<u>Grenzwert von f</u>.

<u>Bsp</u>



$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3.$$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ nicht existiert!

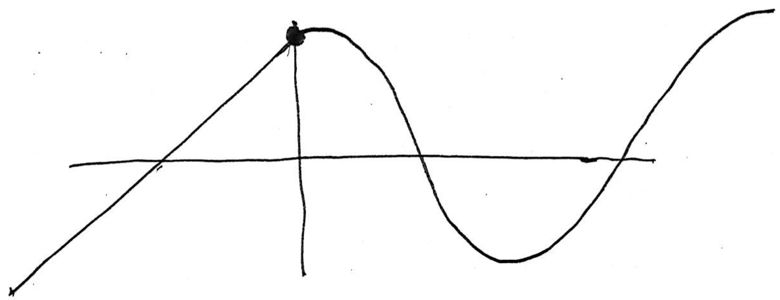
Da $1\neq 3$.

<u>Bmk</u>- falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ existiert

Dann $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

Bmk Die Stetigkeit einer abschnittweise definierte Funktion hängt nicht nur von Ihren Abschnittfunktionen sondern auch vom Verhalten an der Grenzen vom Abschnittsintervale

Bsp. $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0. \end{cases}$



Für $x>0$, der $\cos x$ stetig ist, ist f stetig.

Für $x<0$, $x+1$ stetig und deswegen f ist stetig.

Wir müssen nur stetigkeit in $x=0$ studieren.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos x = 1.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x+1 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

$\Rightarrow f$ ist stetig.

Defn Für $x \to x_0$ hat f der (uneigentliche) Grenzwert ∞ falls gilt

$$\forall T > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in D \setminus \{x_0\}$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > T.$$

Bezeichnet mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

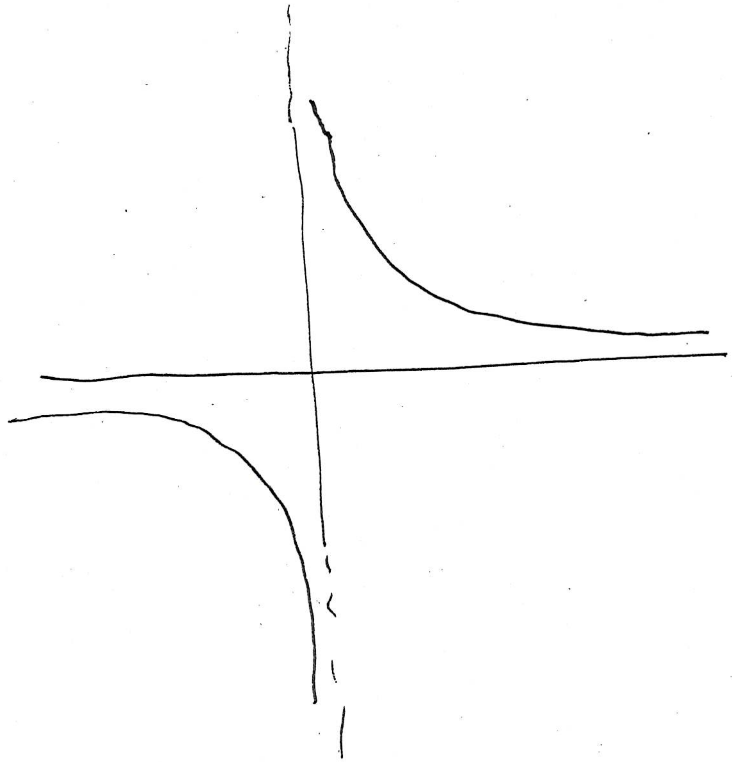
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

$$\Longleftrightarrow \forall T > 0, \ \exists \delta > 0$$

$$\forall x \in D \setminus \{x_0\}, \ |x - x_0| < \delta$$

$$\Longrightarrow f(x) < -T$$

Bsp. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x \neq 0$.



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

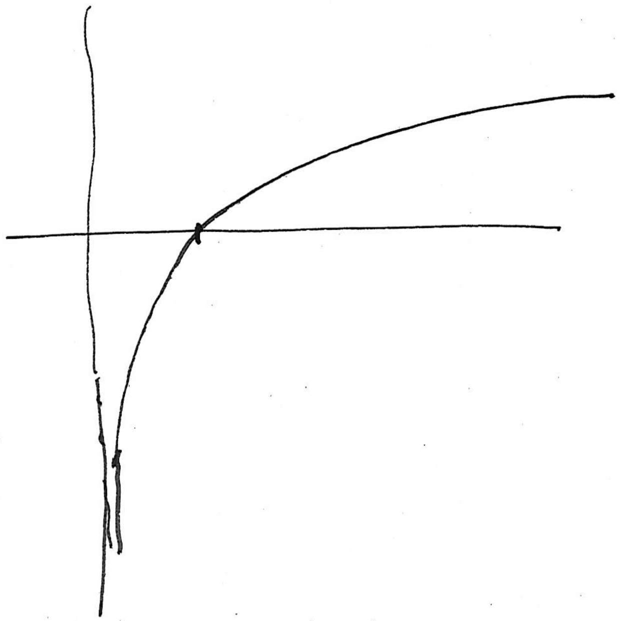
Sei $T > 0$

$\delta := 1/T$. Dann

~~Dann~~ $0 < x < \frac{1}{T}$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{x} > T.$$

Bsp. $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.



Beweis Sei $T > 0$ gegeben.

Sei $\delta = e^{-T} > 0$

Da $\ln x$ streng mon. wachsend ist, Falls $0 < x < \delta = e^{-T}$

dann $\ln x < \ln \delta = \ln e^{-T} = -T$.

Bsp. Für $a > 0$

$$\lim_{x \to 0} x^a = 0.$$

Beweis: Übung

$$x^a = \exp(a \ln x)$$

Defn (Grenzwerte im Unendlichen)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$. Ist D noch oben unbeschränkt, so hat $f(x)$ für $x \to \infty$ den Grenzwert $L \in \mathbb{R}$ falls gilt

$\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0 : \forall x \in D$

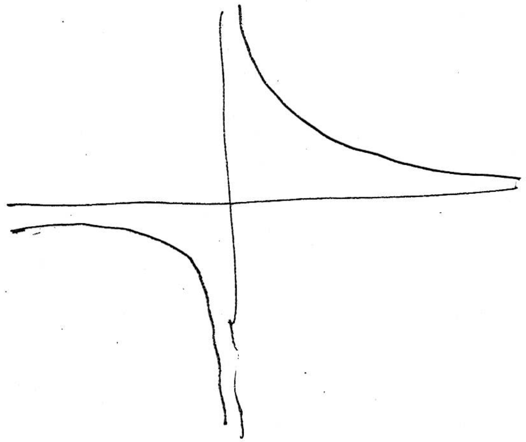
$x > C \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

Analog: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists C>0: \forall x\in D$

$x<-C \Rightarrow |f(x)-M|<\varepsilon.$



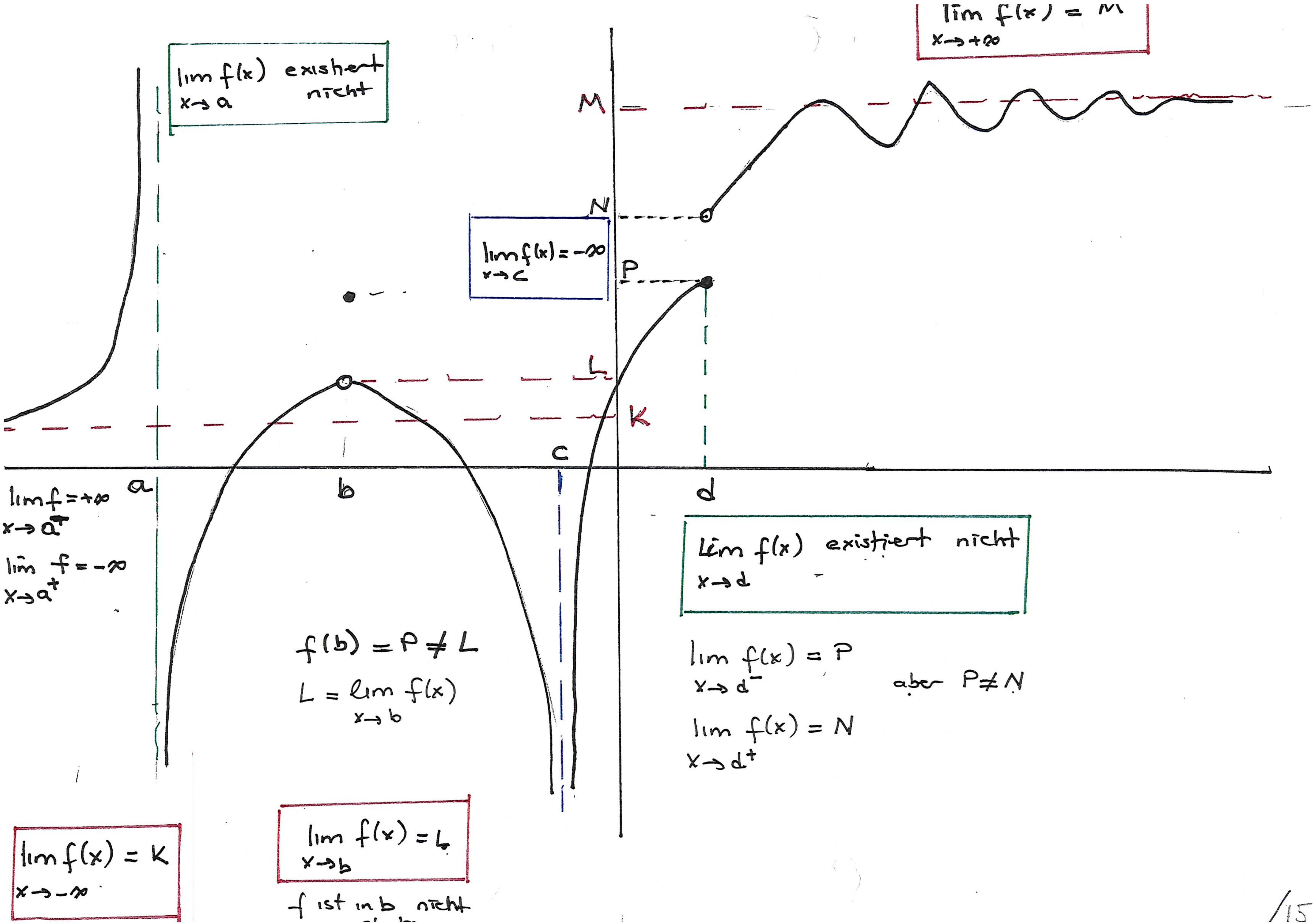
Bsp. $f(x)=\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$


$\lim_{x\to+\infty} f(x) = M$
$\lim_{x\to a} f(x)$ existiert nicht
M
N
P
L
K
$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$
a
b
c
d
$\lim_{x\to a^-} f = +\infty$
$\lim_{x\to a^+} f = -\infty$
$\lim_{x\to d} f(x)$ existiert nicht
$f(b) = P \neq L$
$L = \lim_{x\to b} f(x)$
$\lim_{x\to d^-} f(x) = P$ aber $P \neq N$
$\lim_{x\to d^+} f(x) = N$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = K$
$\lim_{x\to b} f(x) = L$
f ist in b nicht