Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

- Eine Reihe ist eine unendliche Summe

$$a_1 + a_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$.

- Die Reihe konvergiert falls die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\geq 1}$ konvergiert

$$S_n := a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

In diesem Fall wird deren Limes $\lim_{n\to\infty} S_n$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Die Reihe divergiert falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ divergiert

Bsp ① Geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbb{C}$. Die Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$$

konvergiert falls $|q| < 1$

Sie ist divergent falls $|q| \geq 1$

Falls $|q| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

② Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ ist divergent

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\lim S_n = \infty$$

③ Teleskope Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

Satz Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, $\alpha \in \mathbb{C}$.

① Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent und

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

② Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k)$ konvergent

und $$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Bmk Für die Frage "Ob eine Reihe konvergiert" ist das Verhalten am Anfang gleichgültig

Für beliebiges $m \geq N_0$ gilt das

$$\sum_{k=N_0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \iff \sum_{k=m}^{\infty} a_k \text{ konvergiert}$$

(aber der Grenzwert ändert sich.)

Beweis Seien

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$v_n := \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$

$$v_n = s_n + u_n$$

$\lim s_n$, $\lim u_n$ existieren.

Da die Folge $v_n = s_n + u_n$ ist, konvergiert auch v_n

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$$

Somit konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$

Satz (Cauchy Kriterium für Reihen)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists N \geq 1$ s.d

$\forall m \geq n \geq N$

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

Beweis Folgt aus der Cauchy Kriterium für Folgen

(C. Kriteri für Folgen

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0$ s.d. $\forall m \geq n \geq N$

$|a_m - a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow (a_k)_{k\geq 1}$ konvergiert

$$s_m - s_{n-1} = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$= \sum_{k=n}^{m} a_k$$

$(s_k)_k$ konvergiert $\Longleftrightarrow$ (s_k) ist Cauchy.

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N > 0$ s.d

$\forall\, m \geq n > N$

$|s_m - s_{n-1}| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall\, m \geq n \geq N$

Bmk. Cauchy Kriterium:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent

$\Longleftrightarrow \sum_{k=n}^{m} a_k \to 0$

$m \geq n \quad n \to \infty$.

Satz (Notwendige Bedingung zur Konvergenz)

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert

so muss gelten $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

(dh Falls $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$. dann divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$).

$\sum a_k$ konv $\Longrightarrow \lim a_k = 0$.

Vorsichtig! $\lim a_k = 0 \not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert

Bsp. Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergiert}$$

aber $\lim \frac{1}{k} = 0$.

Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ ist divergent

Da $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0$.

Beweis des Satzes: Wir wenden Cauchy Kriterium an (mit $m=n$)

Dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\exists N \geq 1$ s.d.

$\forall m \geq n \geq N$

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

Insbesondere für $m=n$,

$$\left| \sum_{k=n}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow |a_n| < \varepsilon$.

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \;\exists N \geq 1$ s.d.

für $n \geq N$

$|a_n| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \lim a_n = 0$

Bsp.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}(n(n+1))}}^{a_n}.$$

$$\frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)} = \frac{3^n}{3^{n+1}(n(n+1))} + \frac{n^2+n}{3^{n+1}n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{3n(n+1)} + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$\lim a_n = 0$ ✓

$$\frac{1}{3}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}}_{\text{Teleskope}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}}_{\text{geom.}}$$

$= \frac{1}{3}\cdot 1 + 1/6.$

Satz Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0$ $\forall k$.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert

$\Longleftrightarrow$ $(S_n)_{n\geq 1}$, die Folge der Partialsummen ist nach oben beschränkt.

Beweis: Folgt aus mon. Konvergenz Satz.

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= a_{n+1} \geq 0.$$

$S_{n+1} \geq S_n$. $\Rightarrow$ S_n ist mon. wachsend.

Nach mon. Konvergenz Satz S_n konvergiert falls S_n nach oben beschränkt.

Satz **Vergleichsatz**
(Majoranten / Minoranten Kriterium)

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Reihen mit

$$0 \le a_k \le b_k \quad k \ge K.$$

Dann gelten

① $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert
$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent

② $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert
$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert.

Beweis.

① Folgt aus Cauchy Kriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihe

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists N \ge 1$ s.d

$\forall m \ge n \ge N$. $m, n > K$.

$$\left| \sum_{k=n}^{m} b_k \right| < \varepsilon .$$
$$=$$
$$\sum_{k=n}^{m} b_k$$

$$\sum_{k=n}^{m} a_k \le \sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon .$$

$\forall m \ge n \ge N$ und $m, n > K$.

$\xRightarrow[\text{Cauchy}]{} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Bsp.

(1) Wir wissen: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist $\left\{ \begin{array}{l} \text{konvergent} \\ \text{divergent} \end{array} \right.$?

Wir vergleichen mit

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

Teleskope Reihe

$$k(k-1) \leq k^2$$

$$\frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

Verg. Satz

Da $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ konv., konv. auch $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ konv}}$

$$k^3 > k^2$$

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \text{ konv.}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad s > 1 \quad \text{konvergent.}}$$

Bsp. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$k! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots \cdot k \geq 1\cdot \underbrace{2\cdot 2\cdot 2 \cdots 2}_{k-1 \text{ mal}}.$$

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

Da die Geom. Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \text{ konvergiert,}$$

konvergiert auch $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$\boxed{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}$$

später

Bsp. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\sqrt{k} < k$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}}_{\text{divergent}}$$

$$\Downarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ divergent}$$

Absolute Konvergenz

Def. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolute konvergent, falls die Reihen der Absolutebeträge konvergent $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergent} \right)$

Satz Eine abs. konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konv} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv} \right)$$

und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \geq \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right|$$

Bmk. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Aber $\sum a_k$ konv $\not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Bsp. Die Reihe (Alternierende Harmonische Reihe)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$$

ist konvergent.

Diese Alternierende Harmonische Reihe ist ein Spezifall von Satz von Leibniz

Satz (Leibniz) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monotone fallend mit $a_n \geq 0 \ \forall n \geq 1$ und $\lim a_n = 0$

Dann konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \cdot ~~konv~~$$

(**Bsp.** $a_n = \frac{1}{n}$ $\lim a_n = 0$

$a_n \searrow \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konv.)

Falls $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k =: S$

$$a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

(Für die Alt. Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} =: S$

$$\cancel{1} - \frac{1}{2} < S \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq S \leq 1$$
)

Def. Eine konvergente aber nicht abs. konvergente Reihe ist **bedingt konvergent** (conditionally konvergent). //

Bmk Bedingt konvergente aber nicht abs. konv. Reihen kann "Pathologische verhältnis" haben!

Bsp. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} =: S$$

$$\frac{1}{2} \le S \le 1$$

Jetzt ändern wir die Reihenfolge der Summanden wie folgt

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \overbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)}^{1/6} - \frac{1}{8}$$

$$+ \overbrace{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)}^{1/10} - \frac{1}{12}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\right)}_{1/14} - \frac{1}{16} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12} \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \cdots\right)}_{S}$$

$$= \frac{S}{2} \; !$$

Satz (Riemann)

Sei $\sum a_n$ eine konvergente aber nicht abs. konvergente Reihe. Dann gibt es zu jedem $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen A konvergiert.

Bsp. Bei abs. konv. Reihen kann solche "Pathologische Verhältnis" nicht auftreten.

Defn Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ ist eine Umordnung die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, falls es eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt so dass $\tilde{a}_n = a_{\phi(n)}$.

Satz (Dirichlet) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolute konvergiert dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.