Defn $f: D \to \mathbb{R}$

$x_0 \in D$, ein Häufungspunkt.

Falls

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$$

existiert, dann ist

f in x_0 differenzierbar.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)}$$

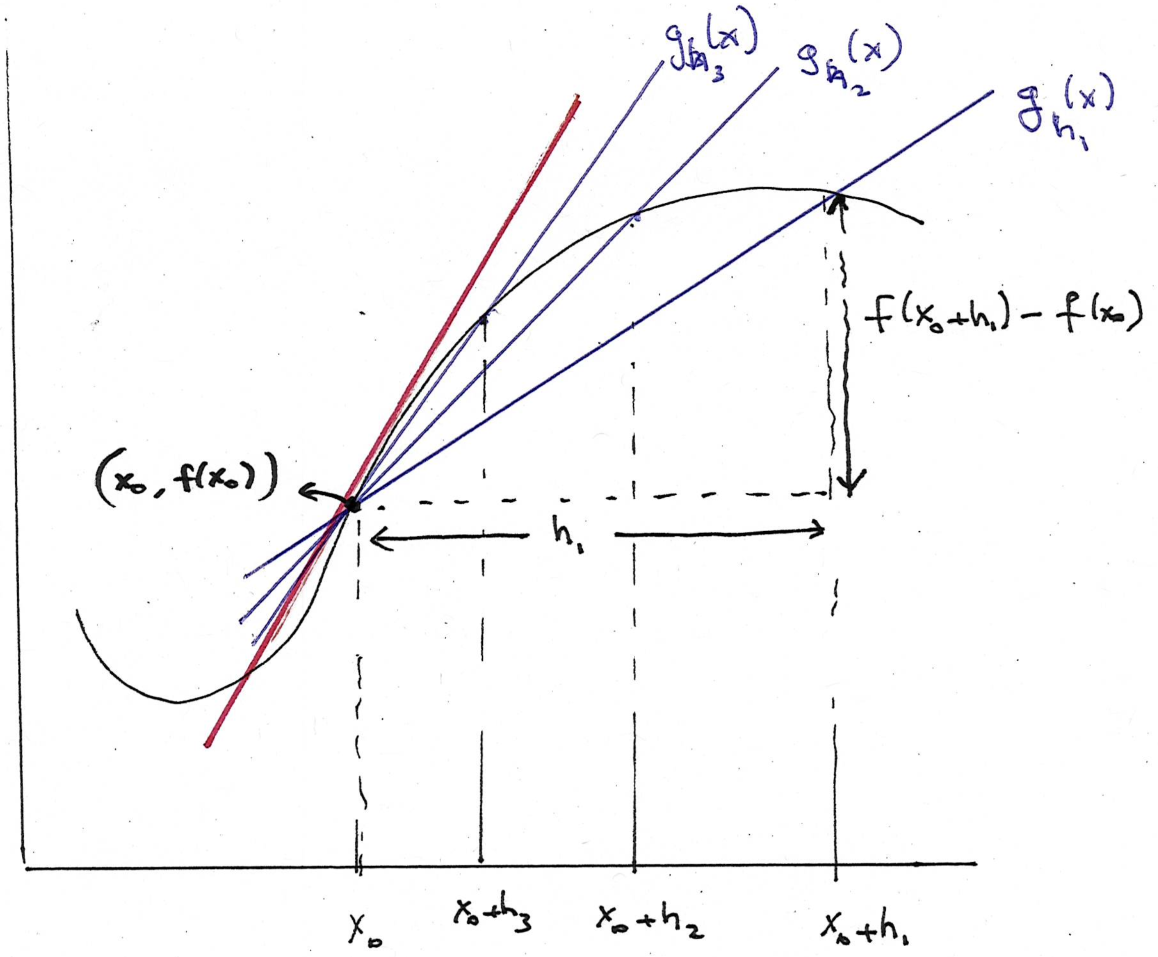
Die Ableitung von f im Punkt x_0.

- Geometrische Entsprechung der Ableitung ist die Tangentensteigung

- Analytisch: Grenzwert von der Steigung der Sekante

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Die Gleichung der Sekante

$$\boxed{\begin{aligned} g_h(x) &= f(x_0) + m_h (x - x_0) \\ m_h &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned}}$$

$$T(x) = \lim_{h \to 0} g_h(x)$$

$$= f(x_0) + \left(\lim_{h \to 0} m_h\right)(x - x_0)$$

$$\lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\boxed{T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Die Gleichung der Tangente.

Satz; $f: D \to \mathbb{R}$

$x_0 \in D$ Häufungspunkt

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ ist in} \\ x_0 \text{ differenzierbar} \end{array} \right\}$

$\Longleftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \exists\, c \in \mathbb{R} \\ r: D \to \mathbb{R} \text{ mit} \\ \text{a) } f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) \\ \qquad\qquad + r(x)(x - x_0), \\ \text{b) } r \text{ ist in } x_0 \text{ ~~differenzierbar~~ stetig} \\ \text{und } r(x_0) = 0. \end{array} \right\}$

---

* f ist in x_0 diff.bar, dann

$$f(x) = T(x) + R_{x_0}(x)$$

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_{x_0}(x)}{x - x_0} = 0.$

Satz f ist in x_0 diff.bar

$\Longrightarrow f$ ist in x_0 stetig

Satz f, g in x_0 diff.bar. Dann

① $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

produkt Regeln

② $\boxed{(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}$

③ Falls $g(x_0) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)$ ist in x_0 diff.bar und

Quotientregeln.

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

Satz (Kettenregel) f in x_0 diff.bar, g in $f(x_0)$ diff.bar. Dann $(g \circ f)$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Satz f ist in x_0 diff.bar und bijektive und $f'(x_0) \neq 0$ $\leftarrow$

f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig.

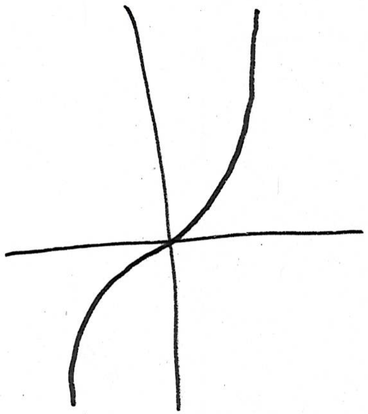
Dann ist f^{-1} in y_0 diff.bar

und
$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Bsp. Die Annahme $f'(x_0) \neq 0$ ist wichtig!

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3$$

ist überall differenzierbar



Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} = g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^{1/3}$$

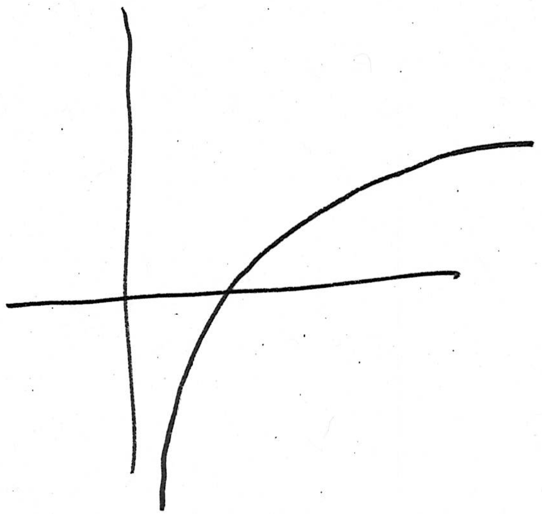
g ist im Punkt $x = 0$ <u>nicht</u> diff.bar.

Bsp

f	f'
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = mx + b$	$f'(x) = m$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

Bsp. $\ln x : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln x$



$\ln x$ ist die Inverse Funktion für $\exp x$

$f(x) = \exp x \qquad f^{-1}(y) = \ln y$

$f'(x) = \exp x \neq 0$

$\left(\ln(\exp x)\right)' = (x)' \xRightarrow{\text{Kettenregel}}$

$\ln'(\exp x) \cdot \exp x = 1$

$\Rightarrow \ln'(\exp x) = \frac{1}{\exp x}$

$\exp x : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ bijektiv

$\forall y \in (0,\infty), \ \exists x$ s.d.

$\exp x = y$

$$\Rightarrow \boxed{\ln'(y) = \frac{1}{y}.}$$

Bsp. $a \in \mathbb{R}$

$h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^a$

Dann $h'(x) = a x^{a-1}$

Beweis $x^a = \exp(a \ln x) \quad x > 0$

$(x^a)' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$f(x) = a \ln x$

$g(y) = \exp y$

$$(x^a)' = \exp(f(x)) \cdot a \frac{1}{x}$$

$$= \exp(a \ln x) \cdot \frac{a}{x}$$

$$= x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}$$

<u>Bsp.</u> $g(x) = x^{1/3}$

$$g'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{2/3}}.$$

Im Punkt $x=0$ nicht definiert!

§4.2 Zentrale Sätze über die erste Ableitung.

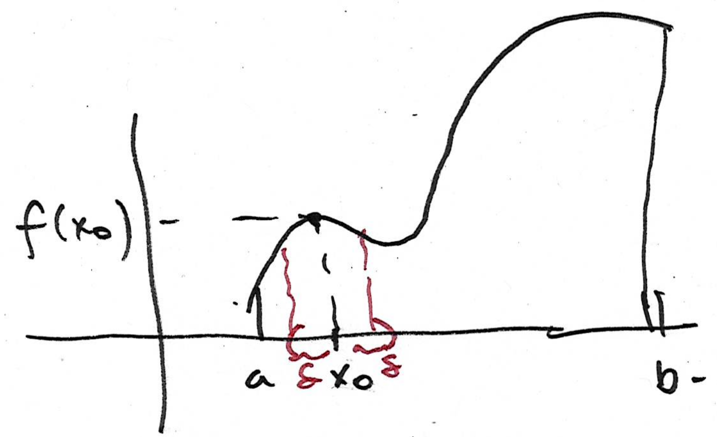
<u>Defn</u> Sei $f: D \to \mathbb{R}$

$D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

1) f besitzt eine <u>lokales Maximum</u> in x_0 falls es

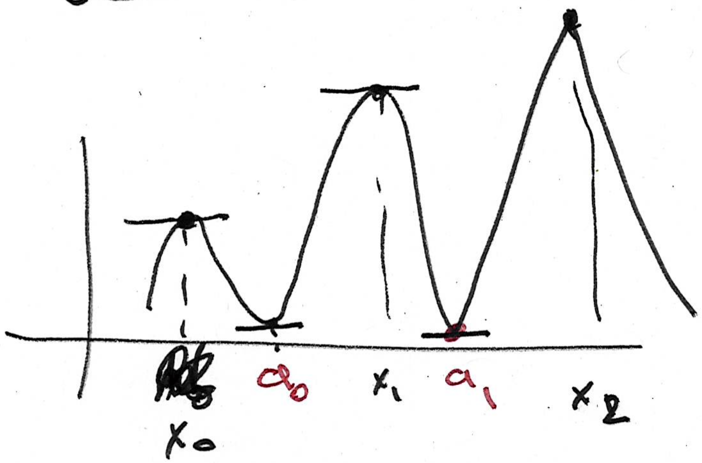
$\exists\, \delta > 0$ mit $f(x) \leq f(x_0)$

$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



2) f besitzt ein lokales Minimum in x_0 falls $\exists \delta > 0$ mit $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

3) f besitzt ein lokales Extrema in x_0 falls es entweder ein lok. Max oder lok. Min von f ist



Defn. Eine kritische Stelle einer Funktion ist ein Punkt x_0 an der $f'(x_0) = 0$ oder undefiniert ist.

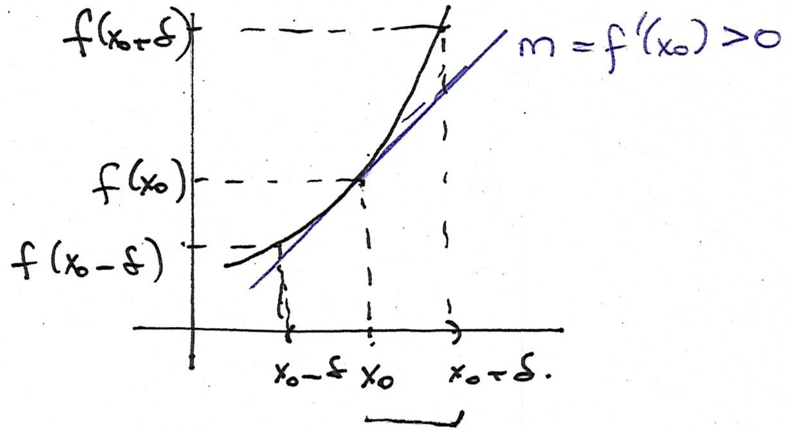
Satz Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

$x_0\in(a,b)$, und f ist in x_0 defferenzierbar.

1) Falls $f'(x_0)>0$, gibt es $\delta>0$

mit $f(x)>f(x_0) \quad \forall x\in(x_0,x_0+\delta)$

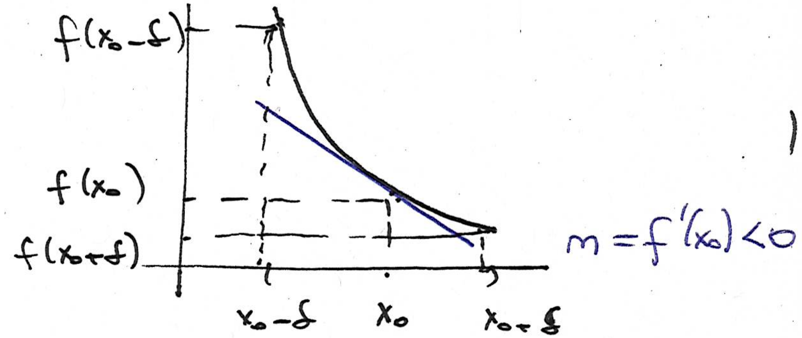
und $f(x)<f(x_0) \quad \forall x\in(x_0-\delta,x)$



2) Falls $f'(x_0)<0$, gibt es $\delta>0$

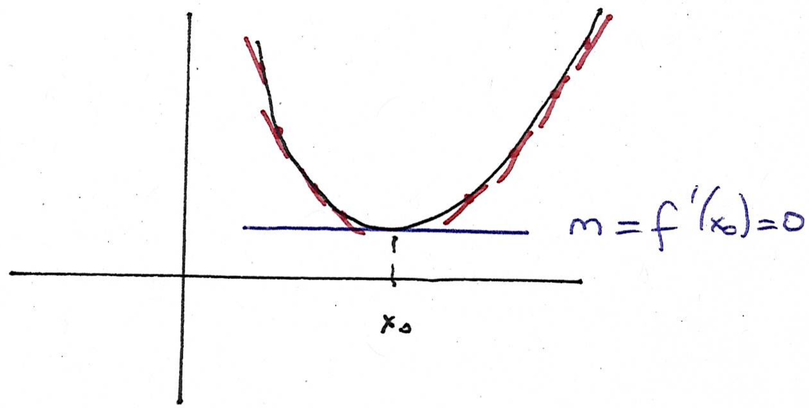
mit $f(x)<f(x_0) \quad \forall x\in(x_0,x_0+\delta)$

$f(x)>f(x_0) \quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0)$



3) Falls f in x_0 ein lok. Extremum besitzt, folgt dass $f'(x_0)=0$

d.h x_0 ist ein lok. Extrema $\Longrightarrow f'(x_0)=0$.



Beweis $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

f ist in x_0 diff.bar $\iff \exists\, \phi : (a,b)\to\mathbb{R}$ stetig in x_0

und

$$f(x)=f(x_0)+\phi(x)(x-x_0)$$

und $f'(x_0)=\phi(x_0)$

① $f'(x_0)=\phi(x_0)>0$

Da ϕ in x_0 stetig ist

$\exists\, \delta>0$ mit $\phi(x)>0$

$\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$

(Stetige Funktionen kann ihren wert plötzlich nicht ändern).

ϕ ist in x_0 stetig

Sei $\varepsilon=\dfrac{\phi(x_0)}{2}>0$

dann $\exists\,\delta>0$ s.d

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |\phi(x)-\phi(x_0)|<\frac{\phi(x_0)}{2}$$

$\Rightarrow |x-x_0|<\delta$

$$\Rightarrow -\frac{\phi(x_0)}{2}<\phi(x)-\phi(x_0)<\frac{\phi(x_0)}{2}$$

$$\Rightarrow 0<\frac{\phi(x_0)}{2}<\phi(x)<3\,\frac{\phi(x_0)}{2}$$

Insbesondere für

$x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ $\phi(x)>0$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\phi(x)}_{>0}\underbrace{(x - x_0)}$$

Für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Aber für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$(x - x_0) > 0$$

Für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$$(x - x_0) < 0$$

$\Rightarrow$ Falls $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

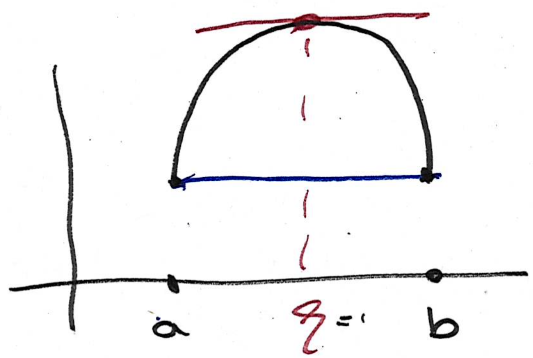
$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\phi(x)}_{>0}\underbrace{(x - x_0)}_{>0}$$

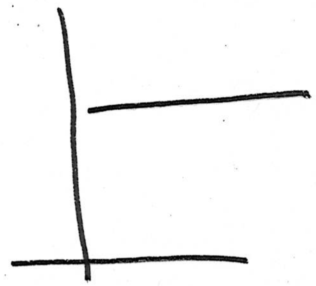
$\Rightarrow f(x) > f(x_0)$.

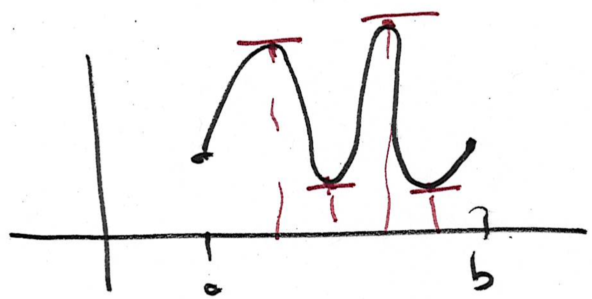
Satz (Rolle) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) diff.bar

Falls $f(a) = f(b)$ dann gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in (a, b)$ so dass

$$f'(\xi) = 0.$$







Beweis $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

stetig,

Dann folgt aus Min-max Satz

dass es $u, v \in [a,b]$ gibt

mit $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$

Falls eines ~~den~~ Punkten

$u\,(v) \in (a,b)$, dann

nennen wir $u =: \xi$

Dann f ~~hat~~ in $\xi = u$

ein minimum und folgt

dass $f'(\xi) = 0$

Falls aber $\{u, v\} \subset \{a, b\}$.

folgt $f(a) = f(u) = f(v) = f(b)$

$f(b) = f(a) = f(a) \leq f(x) \leq f(v) = f(b) = f(a)$

$\Rightarrow f(x) = f(a) \quad \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow f$ ist in $[a,b]$ konstant

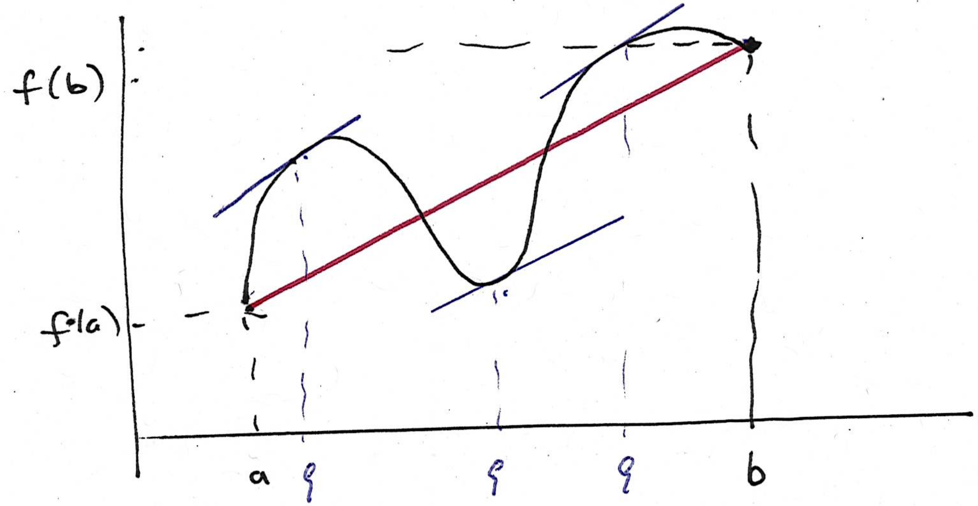
$\Rightarrow f'(\cancel{x}) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Satz (Mittelwertsatz)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar.

Dann gibt es mindestens eine $\xi \in (a,b)$ mit

$$\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{Steigung der Sekante}} = \underbrace{f'(\xi)}_{\text{Steigung der Tangente im } x=\xi}.$$



Beweis: Die Idee ist sich auf den Fall $f(a) = f(b) = 0$ zurückzuführen und den Satz von Rolle anwenden.

Die Gleichung der Geraden durch $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ ist

$$s(x) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a) + f(a).$$

Sei $h(x) := f(x) - s(x)$

Übung: Zeigen dass $h(a) = 0$, $h(b) = 0$.

$\Rightarrow$ mittels Rolle's Satz

$\exists\ \xi \in (a,b)$ so dass

$h'(\xi) = 0.$

$h'(\xi) = f'(\xi) - s'(\xi) = 0.$

$\Rightarrow f'(\xi) = s'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Kor $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, in (a,b) diff.bar

Dann

(1) Falls $f'(\xi) = 0 \ \forall \xi \in (a,b)$ dann ist f konstant

(2) Falls $f'(\xi) = g'(\xi) \ \forall \xi \in (a,b)$

$\Rightarrow \exists\ c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c$
$\forall x \in (a,b)$

(3) (a) $\forall x \in (a,b)$

$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) > 0)$

$\Rightarrow f$ ist mon. (streng) wachsend.

(b) $\forall x \in (a,b)$

$f'(x) \leq 0 \quad (f'(x) < 0)$

$\Rightarrow f$ ist mon (streng) fallend.

(4) Falls es $M > 0$ gibt mit $|f'(x)| \leq M$ dann folgt dass $\forall \{x,y\} \in (a,b)$

$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$

Beweis~~e~~ (1) Seien

$a \leq x < y \leq b$ beliebig

Nach Mittelwertsatz sei $\xi \in (x,y)$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) = 0.$$

$y \neq x$, $y-x \neq 0$

$\Rightarrow f(y) = f(x).$

$\Rightarrow f$ ist konstant.

(2) Folgt aus (1)

auf $h = f - g$

$h' = 0 \Rightarrow h = \text{konstant}$

$\Rightarrow f = g + c.$

(4) $a \leq x < y \leq b$

und sei $\xi \in (x,y)$

mit $$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi)$$

(Nach MWS existiert eine solche ξ)

$$\Rightarrow \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} = |f'(\xi)| \leq M$$

$\Rightarrow |f(y)-f(x)| \leq M|y-x|$

(3) Übung.

Bmk. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$\Longrightarrow$ f ist mon streng wachsend.

f ist streng mon. wachsend $\not\Longrightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$

z.B $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$ im Punkt

$x = 0, \quad f'(0) = 0$

Bsp. Trigonometrische Funktion.

1) $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$

$\sin'(x) = \cos x$

und $\cos x > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Dann $f = \sin x$ ist streng mon. wachsend.

$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [1, 1]$

bijektive, $\sin' x \geq 0$

$\Rightarrow$ Inverse Funktion ist diff.-bar.

$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Für $y = \sin x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

folgt dass

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

Nun müssen wir $\cos x$ als ein Funk. in y schreiben. $(y = \sin x)$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$y^2 = 1 - \cos^2 x.$$

$$\cos^2 x = 1 - y^2$$

$$\Rightarrow \cos x = \sqrt{1-y^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.}$$

② ~~cos~~ Arccos x.

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$

ist streng mon. fallend

da $\forall\, x \in (0, \pi)$

$$\cos'(x) = -\sin x < 0$$

$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$

die Umkehrfunktion ist

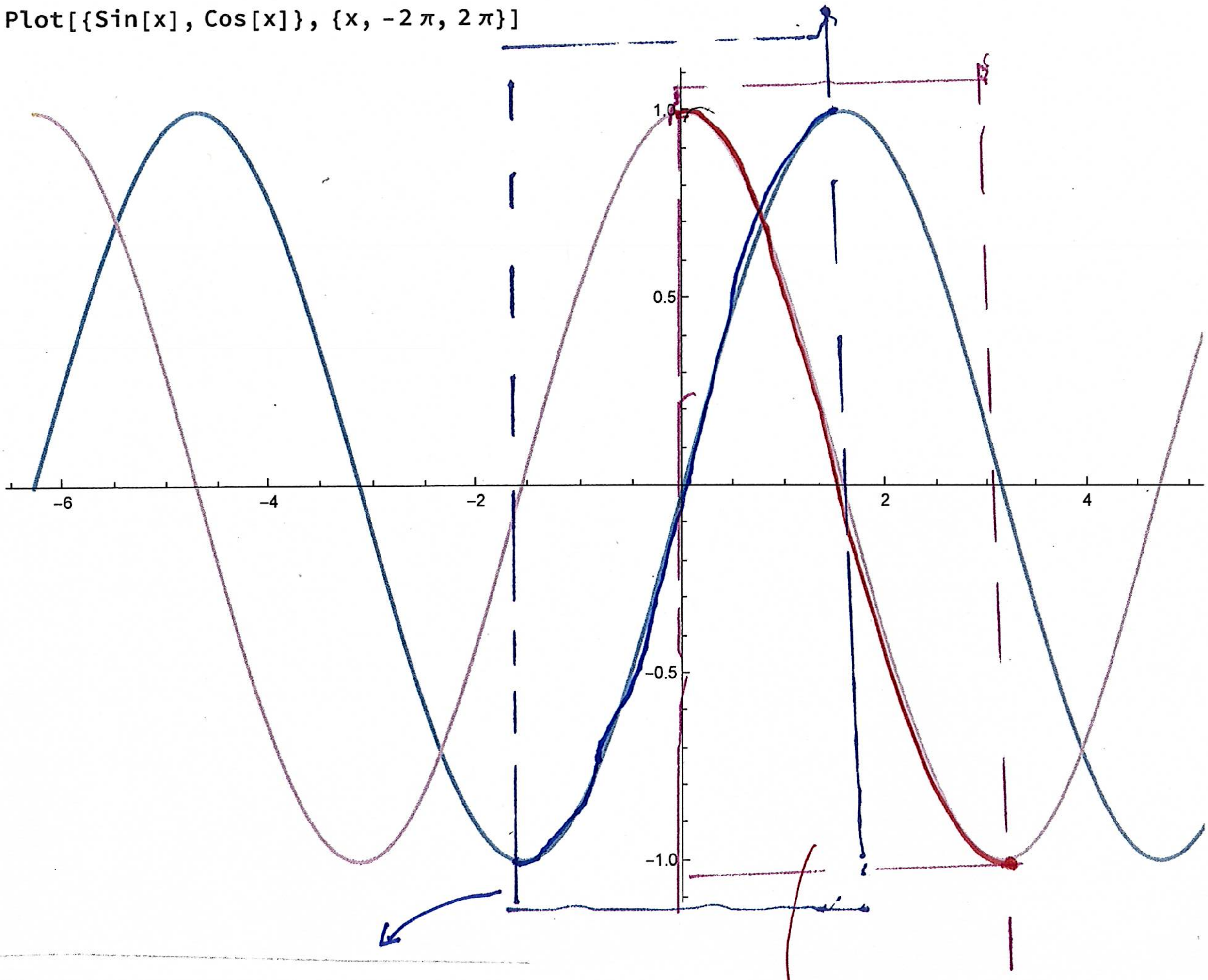
diff.bar und gilt

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(x)} = \frac{-1}{\sin x}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

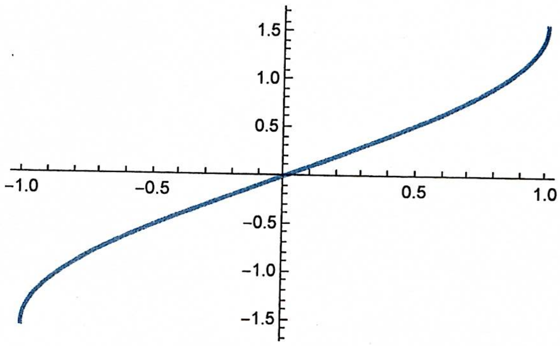
In[ ]:= Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, -2 π, 2 π}]

Out[ ]=



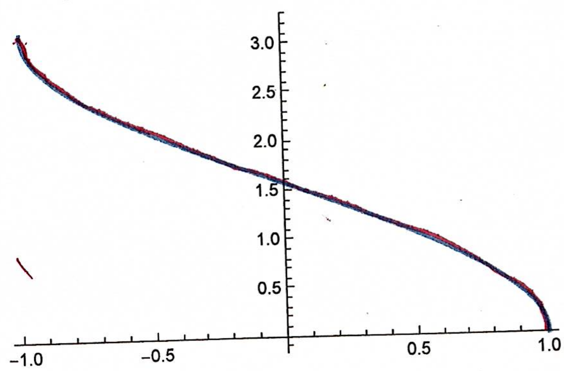
In[ ]:= Plot[ArcSin[x], {x, -1, 1}]

Out[ ]=



In[3]:= Plot[ArcCos[x], {x, -1, 1}]

Out[3]=



③ Arctan

Für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$\tan x$ ist auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng mon. wachsend

mit $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, \infty)$

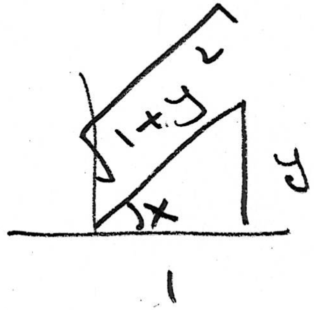
ist bijektiv

$\arctan : (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

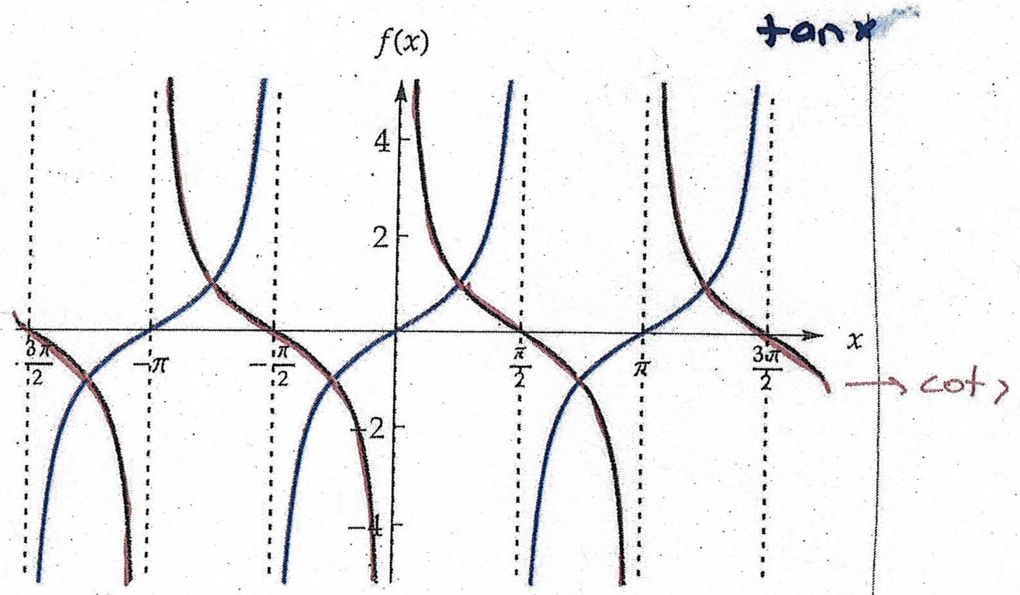
ist diff.bar.

und für $y = \tan x$

$$\boxed{\arctan'(y) = \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}.}$$



/12



b Die π-periodischen Funktionen $\tan x$ (blau) und $\cot x$ (rot)