Satz (Zwischenwertsatz _ ZWS)

Sei I ein Interval, $a, b \in I$
$f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf I. Für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein c zwischen a und b mit $f(c) = y$

Satz (Min - Max Satz)

Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf kompakte Interval $[a, b]$.
Dann gibt es $u, v \in [a, b]$ mit
$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in [a, b]$
Insbesondere $f([a, b])$ ist beschränkt. $\operatorname{Bild} f = f([a, b]) =: J$ ist auch ein Interval und $J = [f(u), f(v)]$ ist kompakt.

Satz (Umkehrabbildung satz)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monotone wachsend (fallend). (I ein Interval) Dann ist das Bild von f, $f(I) =: J$ ein Interval und die Umkehrfunktion
$f^{-1}: J \longrightarrow I$ ist auch streng mon. wachsend (fallend) und stetig.

Bsp: Sei $n \geq 1$. Dann ist
$f: [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$
$x \longmapsto x^n$ streng mon. wachsend, stetig, surjektive.
Nach dem Umkehrabbildungsatz, existiert eine stetig, mon. wachsende Umkehrfunktion, genannt die n-te Wurzel $f^{-1}: [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$
$x \longmapsto x^{1/n}$

//

Satz $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$

ist streng mon. wachsend stetig, surjektive.

Beweis ① exp ist streng mon. wachsend. ✓

② $\exp x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ✓

③ exp ist surjektive ✓

④ **exp ist stetig**

Beweis ⓐ exp ist im Punkt $x = 0$ stetig

Für $|x| < 1$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x|^{n-1} \leq 1.$$

Es gilt

$$|\exp x - 1| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right|$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right|$$

$$\leq |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{n!}$$

$$\leq |x| \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}}_{e-1} \qquad (|x|^{n-1} \leq 1).$$

$$|\exp x - 1| \leq |x|(e-1)$$

Sei nun $(x_n) \to 0$, Dann ist

$$0 \leq |\exp(x_n) - 1| \leq |x_n|(e-1)$$

$$\downarrow \qquad \Big\downarrow \text{ Sandwich Satz} \qquad \downarrow \text{ Da } x_n \to 0$$

$$0 \qquad\qquad\qquad\qquad 0$$

$$|\exp(x_n) - 1| \to 0$$

$$\Rightarrow \exp x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = \exp(0)$$

$(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\exp(x_n) \to \exp(0)$

$\exp(\lim x_n)$

$\lim(\exp(x_n)) = \exp(\lim x_n)$

$\Rightarrow$ exp ist in $x = 0$ stetig.

(b) Für Stetigkeit in $x_0 \in \mathbb{R}$ zu zeigen: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $(x_n) \subset \mathbb{R}$ mit $\lim x_n = x_0$

z.z: $\exp(x_n) \to \exp(x_0)$

$\lim(\exp(x_n)) = \exp(\lim x_n)$

$$\exp(x_n) = \exp(x_n - x_0 + x_0)$$
$$= \exp(x_n - x_0) \cdot \exp(x_0)$$

$y_n := x_n - x_0$

Dann $\lim y_n = 0$

$\lim(\exp(y_n)) = \exp(\lim y_n)$.

$$\lim \exp(x_n) \Rightarrow \lim(\exp(x_n - x_0))\exp(x_0)$$
$$= \exp(x_0) \lim \exp(x_n - x_0)$$
$$= \exp(x_0) \lim \exp(y_n)$$
$$= \exp(x_0) \underbrace{\exp(0)}_{1}$$
$$= \exp(x_0)$$

$\exp(x_n) \to \exp(x_0)$ falls $(x_n) \to x_0$.

$\Rightarrow$ exp ist stetig in x_0.

Da exp ist streng mon. wachsend

$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ surjektive, stetig.

Nach Umkehrabbildung satz,

gibt es ein Umkehrabbildung,

die auch streng mon. wachsend

stetig. Wir bezeichnen $\exp^{-1}$ mit $\ln$

$$\underset{\ln}{\exp^{-1}} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln x$$

Satz Der natürliche Logarithmus

$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist

streng mon. wachsend, bijektiv

stetige Funktion

Es gelten (a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

(b) $\ln(1) = 0$

Beweis (a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

$\exp(\ln x) = x$

$\exp(\ln x + \ln y)$

$\underset{\exp(a+b)=\exp a \exp b}{=} \exp(\ln x)\exp(\ln y)$

$= x \cdot y = \exp(\ln(xy))$

$\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln(xy))$

exp ist injektive

$\Rightarrow \ln x + \ln y = \ln(xy)$. ☒

Defn Für $x>0$, $a\in\mathbb{R}$ definieren wir $x^a := \exp(a\ln x)$

Insbesondere $x^0 = 1 \quad \forall x>0$

Kor 1) Für $a>0$ ist

$$(0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$$
$$x \longmapsto x^a = \exp(a\ln x)$$

eine stetige, streng mon wachsende bijektion

2) Für $a<0$ ist

$$(0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$$
$$x \longrightarrow x^a$$

ist eine stetige, streng mon fallende bijektion.

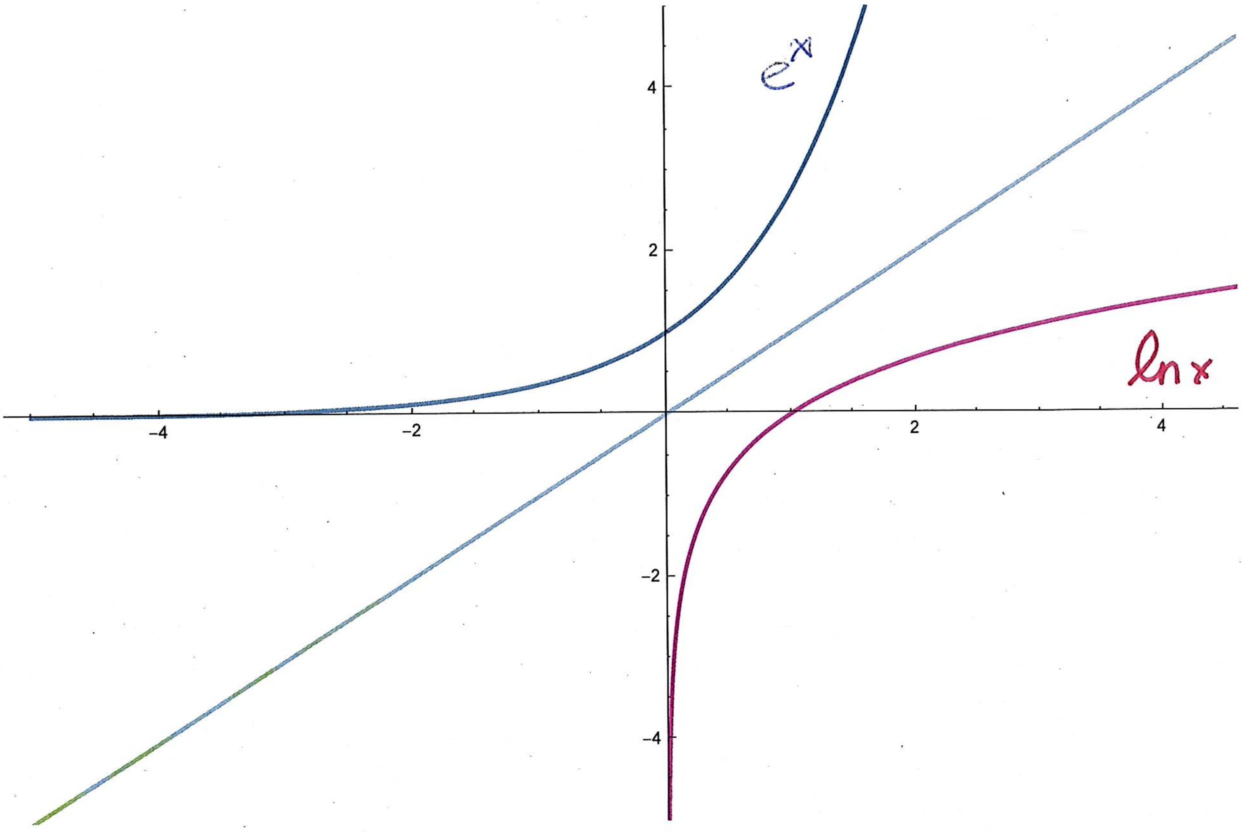
3) $\ln x^a = a\ln x \quad \forall a\in\mathbb{R},\ x>0$

4) $x^a x^b = x^{a+b} \quad \forall a,b\in\mathbb{R},\ x>0$

5) $(x^a)^b = x^{ab} \quad \forall a,b\in\mathbb{R},\ x>0.$

In[1]:= `Plot[{Exp[x], , x, Log[x]}, {x, -5, 5}, PlotRange → {-5, 5}]`

Out[1]=



Clicker Frage

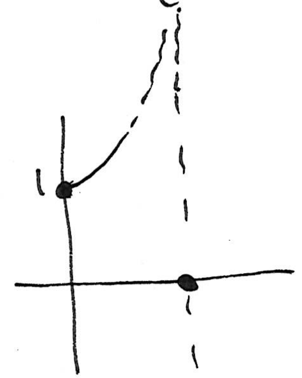
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f(0) = 1 \,, \quad f(1) = 0$

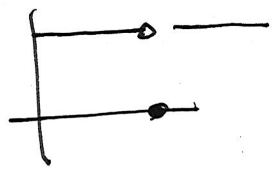
- f stetig in $[0,1)$
  $\Rightarrow f$ ist in 1 stetig

FALSCH

sei $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$



oder $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$



- $(x-1)^2 \le f(x) \le 1 - x \quad \forall x \in [0,1]$

Dann ist f im $\begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix}$ stetig.

① f ist stetig im Punkt $x = 0$

sei $x_n \to 0$

z.z $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$
$= f(0) = 1$

$(x_n)_{n \ge 1} \in [0,1]$ mit $\lim x_n = 0$

dann $(x_n - 1)^2 \le f(x_n) \le 1 - x_n$

$$\underset{n\to\infty}{\downarrow} \qquad\qquad \underset{n\to\infty}{\downarrow}$$

$$1 \qquad\qquad\qquad 1$$

Nach Sandwichsatz $f(x_n) \to 1 = f(0$

$\Rightarrow f$ ist im $x = 0$ stetig.

② f ist im Punkt $x=1$ stetig

$(x_n) \to 1$

z.z. $\lim\left(f(x_n)\right) = f(\lim x_n) = f(1) = 0$

$$(x_n - 1)^2 \leq f(x_n) \leq 1 - x_n$$

$$\begin{array}{ccccc} (x_n-1)^2 & \leq & f(x_n) & \leq & 1-x_n \\ \downarrow & & \Big\downarrow \text{ Sandwich.} & & \downarrow \\ 0 & & 0 = f(1). & & 0 \end{array}$$

§ 3.7 Konvergenz von Funktionenfolgen.

$(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen

$a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \to a(n) = a_n$

Eine Funktionfolge ist eine Abbildung

$\mathbb{N} \to \mathbb{R}^D$
$n \to f_n : D \to \mathbb{R}.$

d.h. für jedes n f_n ist eine Abbildung.

Für jedes $x \in D$ erhält man eine Folge $(f_n(x))_{n\geq 1}$ reeller Zahlen.

Bsp. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$
$x \to x^n$

$f_n(x) = x^n$

Falls $x = \frac{1}{2}$

$$\left(f_n\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)_{n\geq 1} = \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)_{n\geq 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$x = \frac{1}{3}$

$$\left(f_n\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)_n = \left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^n\right)_{n\geq 1} \longrightarrow 0$$

$x = 1$ $\quad f_n(x) = f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$

Für alle $x \in [0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x)) = \lim x^n = 0$$

Für $x = 1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim 1^n = \lim 1 = 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1. & x = 1 \end{cases}$$

$f_n : D \to \mathbb{R}$

Defn. Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ falls für alle $x \in D$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

$$\boxed{\forall x \in D, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists N_{x,\varepsilon} > 0 \ \text{s.d} \ \forall n > N \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.}$$

Bsp. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \to x^n$ — jedes f_n ist stetig

$f_n \to f$ punktweise konvergiert $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ nicht stetig

Defn Die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$

$f_n : D \to \mathbb{R}$ **konvergiert**

gleichmässig in D gegen

uniform

$f : D \to \mathbb{R}$ falls gilt

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \geq 1 \text{ s.d } \forall n \geq N \quad \forall x \in D,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}$$

Satz sei $D \subset \mathbb{R}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehen aus in D stetigen Funktionen. Falls $f_n \to f$ gleichmässig konvergiert gegen $f : D \to \mathbb{R}$. Dann ~~f~~ ist f in D stetig.

Bmk $f_n \xrightarrow{\text{gleichmässig}} f$

falls $\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Kor Die Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmässig in D falls

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 1$ s.d $\forall m, n \geq N$ und $\forall x \in D$

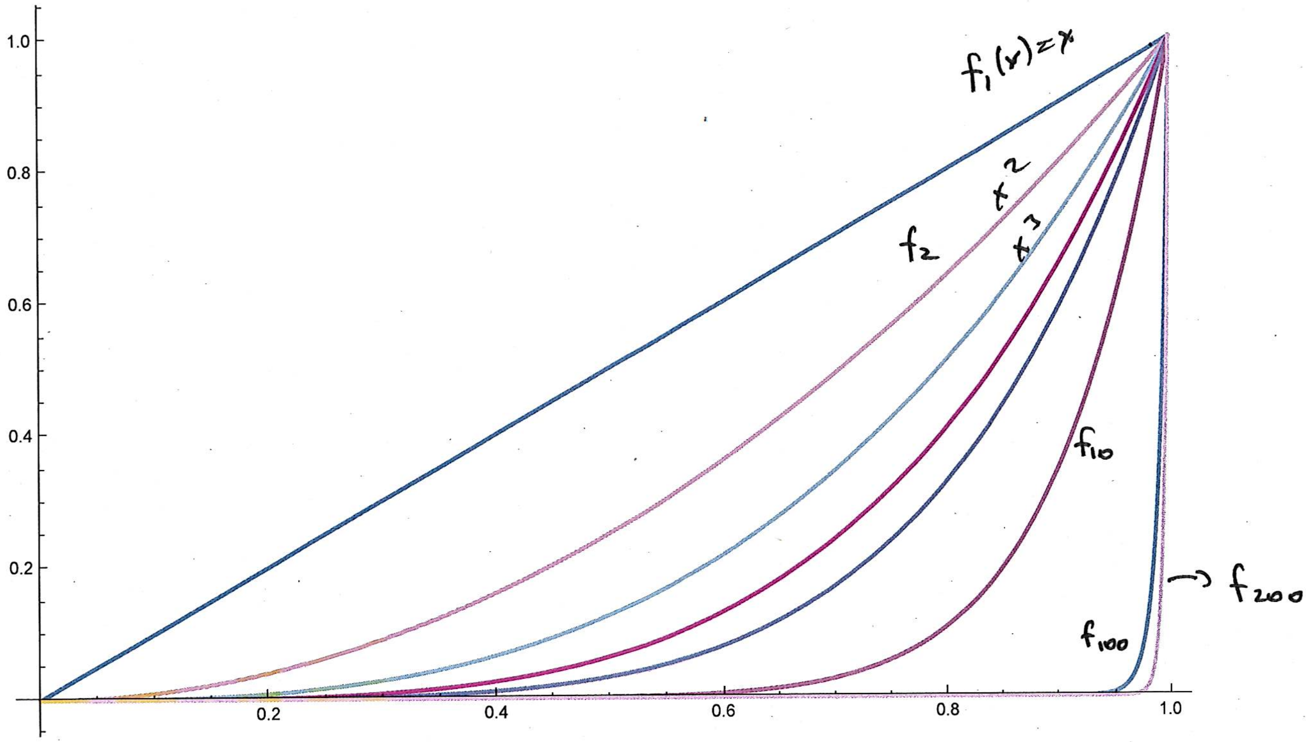
$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

```
In[1]:= Plot[{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^10, x^100, x^200}, {x, 0, 1}]
```

••• General: 0.0000204286^{100} is too small to represent as a normalized machine number; precision may be lost.

••• General: 0.0000204286^{200} is too small to represent as a normalized machine number; precision may be lost.

Out[1]=



Bsp. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x + \frac{1}{n}$

Sei $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x$

$f_n \to f$ gleichmässig

weil

Sei $\varepsilon > 0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\left(x + \frac{1}{n}\right) - x\right|$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Bmk $f_n \to f$ gleichmässig

$\Rightarrow f_n \to f$ punktweise

$f_n \to f$ punktweise

$\not\Rightarrow f_n \to f$ gleichmässig

$$f_n = x^n \xrightarrow[\text{punktweise}]{} f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & \end{cases}$$

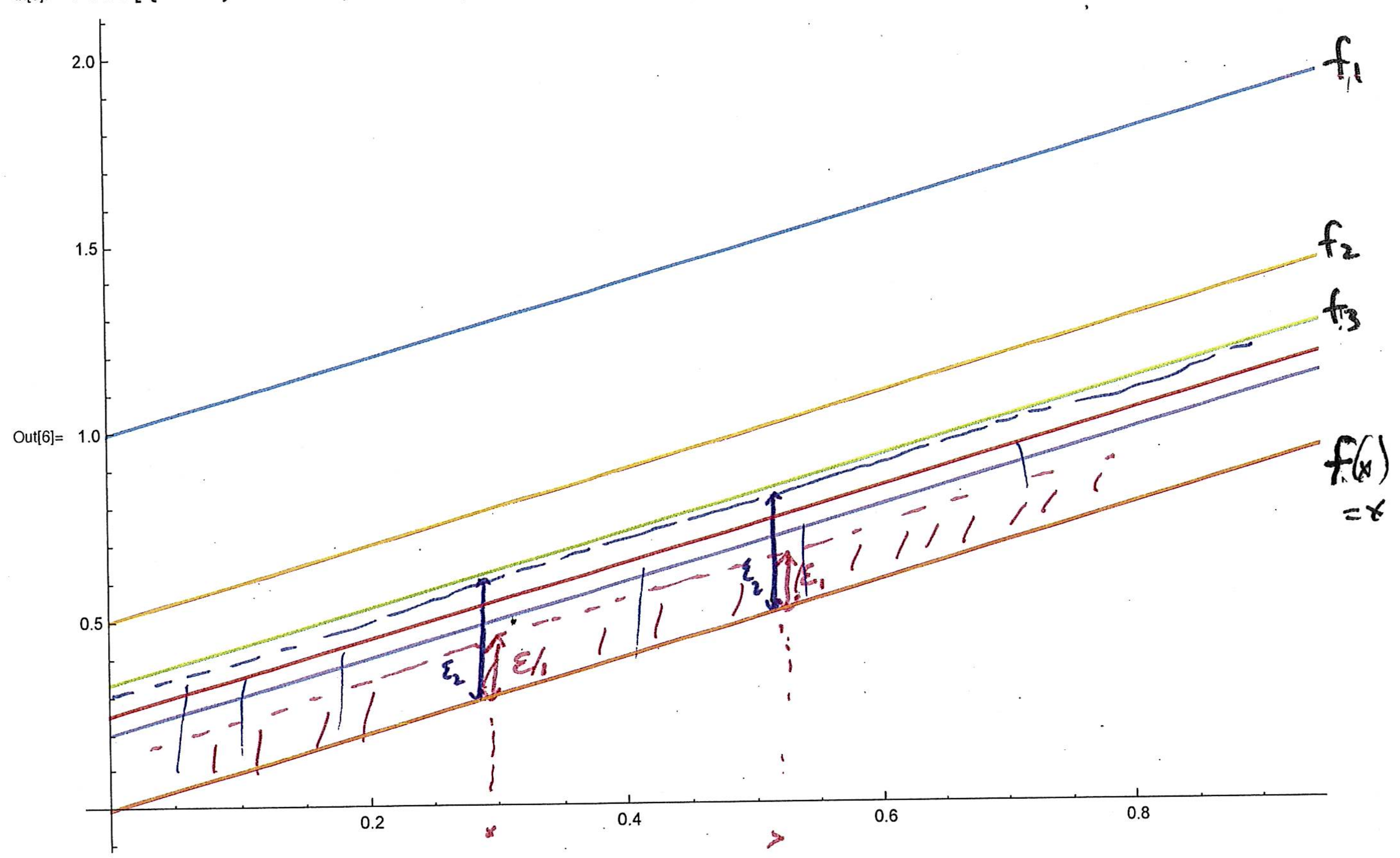
Aber es kann nicht gleichmässig

weil $f(x) =$ grenzwertfunktion ist nicht stetig

3.

In[6]:= `Plot[{x + 1, x + 1 / 2, x + 1 / 3, x + 1 / 4, x + 1 / 5, x}, {x, 0, 1}]`

Out[6]=



$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \frac{1}{n}$ $\qquad$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$

$f_n \to f$ punktweise und gleichmässig

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann es gibt N

so dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}$

N hängt von ε ab, aber nicht von x ab.

1/14

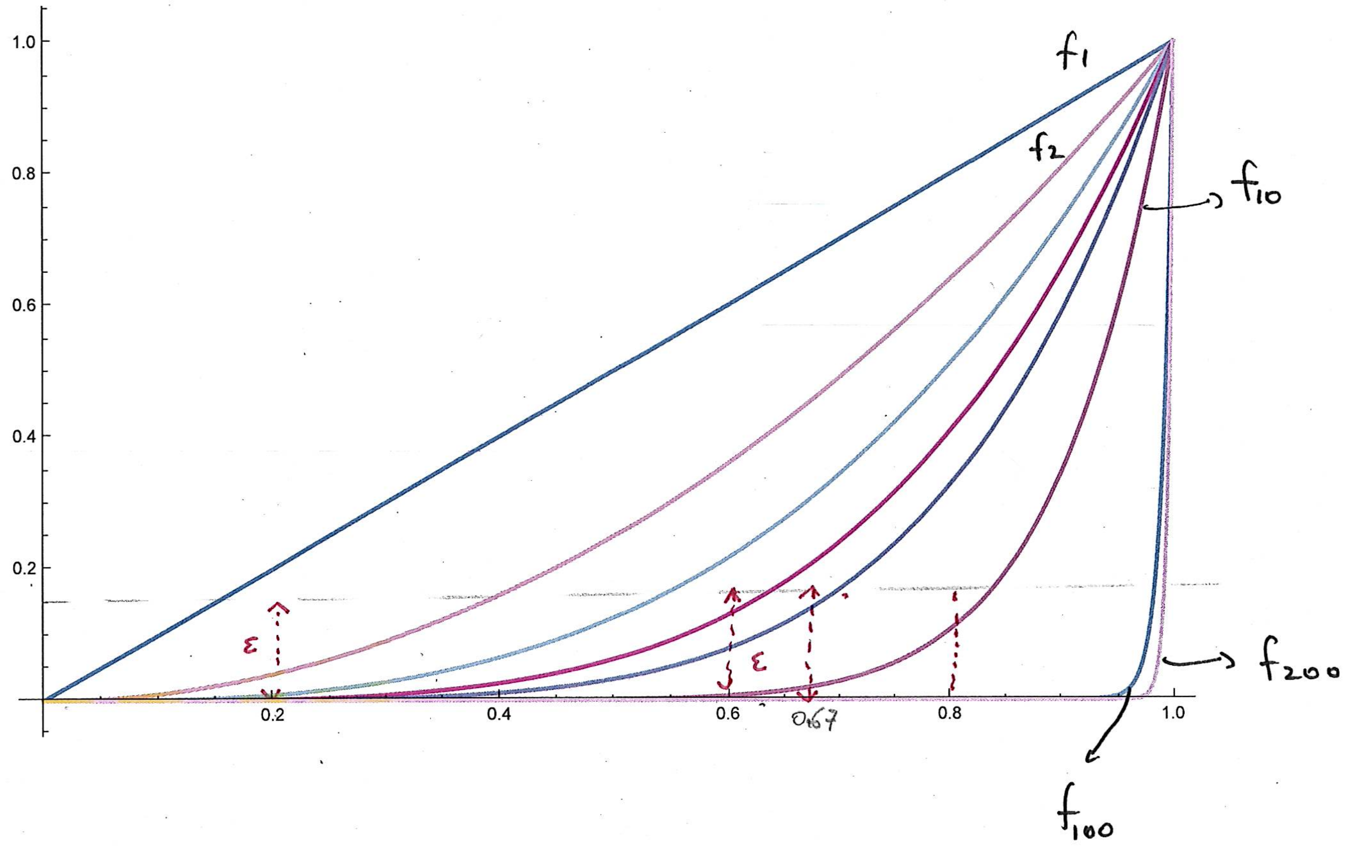
In[1]:=

```
Plot[{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^10, x^100, x^200}, {x, 0, 1}]
```

••• General: 0.0000204286^{100} is too small to represent as a normalized machine number; precision may be lost.

••• General: 0.0000204286^{200} is too small to represent as a normalized machine number; precision may be lost.

Out[1]=



$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$f_n \to f$ Punktweise

For gegebenen $\varepsilon > 0$, N hängt nicht nur von ε sondern auch von x ab!

For $x = 0.2$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ for $N > 2$

For $x = 0.6$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ for $N > 3$

For $x = 0.67$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ for $N > 4$.

15

Sei nun $f_n : D \to \mathbb{R}$

eine Folge von Funktionen

Nun betrachten wir die

Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$

z.B. A Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

mit $f_k(x) = c_k x^k$

Defn Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig in D

falls die durch

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Ie $(s_n(x))_{n \geq 1}$ konv. gleichmässig.

Satz Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen

Wir nehmen an dass

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$$

und dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert

Dann konv. die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ gleichmässig in } D$$

und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D stetige Funktion.