Satz Partielle Integration

Seien $a < b$ reelle Zahlen und

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff.

Dann gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx}$$

Bsp.

$$\int x e^x\, dx = x e^x - e^x + C$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$$

Satz Substitution

Sei $a < b$, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$

stetig differenzierbar

$I \subset \mathbb{R}$ mit $\phi([a,b]) \subset I$

und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann gilt

$$\boxed{\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\, dx}$$

Kor Für die unbestimmte Integral gilt

$$\int f(x)\, dx \Big|_{x=\phi(t)} = \int \underline{f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)}\, dt$$

Bmk 2 Lesarten

I von links nach rechts

II von rechts nach links

(1) Man kann die Substitutionsregel von links nach rechts anwenden falls ein Integral explicit in der Form

$$\int_a^b \underbrace{f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)}\, dt$$

liegt.

Bsp. $\int_0^1 \underbrace{\underbrace{(1+t^2)}^{2025} \cdot \underbrace{2t \, dt}}$

(1) $x = 1+t^2 = \phi(t)$

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

$$dx = 2t\,dt$$

$$\int_{x=1}^{x=2} x^{2025}\, dx = \left.\frac{x^{2026}}{2026}\right|_{x=1}^{x=2}$$

$$\frac{2^{2026} - 1}{2026}.$$

(2) oder

$$= \left.\frac{(1+t^2)^{2026}}{2026}\right|_{t=0}^{t=1}$$

$$= \frac{2^{2026} - 1}{2026}$$

Bmk Wenn man bestimmte Integrale berechnet gibt es 2 methoden mit den Integrationsgrenzen umzugehen

① Man ändert die Integrationsgrenzen während der Substitution, $x = \phi(t)$ und benutzt die Grenzen für x

oder

② Man substituiert $x = \phi(t)$ berechnet eine Stammfunk. in x und ersetzt danach die neue variable x mit der alten t und benutzt die Grenzen für t.

Bsp. $$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$$

$$x = 1+e^t = \phi(t)$$
$$dx = e^t\,dt = \phi'(t)\,dt$$

$$\int_{x=2}^{x=1+e} \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_{x=2}^{x=1+e}$$
$$= \ln|1+e| - \ln 2$$
$$= \ln\left|\frac{1+e}{2}\right|.$$

oder

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$
$$= \ln|1+e^t|\Big|_{t=0}^{t=1}$$
$$= \ln|1+e| - \ln|2|$$
$$= \ln\left|\frac{1+e}{2}\right|.$$

II 2. Lesart ist von rechts nach links

Ein Integral liegt in der Gestalt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

mit Gewissen Grenzen α, β

das schwer zu berechnen scheint. Dann versucht man mittels geeigneter Subs $x=\phi(t)$ dieses Integral umzuformulieren so dass die Subs. regel anwendbar ist wobei

$$\phi(t_0)=\alpha \quad , \quad \phi(t_1)=\beta .$$

Bsp.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$x=\sin t$

$dx=\cos t\,dt$

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}$$
$$=\sqrt{\cos^2 t}$$
$$=\cos t$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos t\,\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$$

$x=0=\sin t \Rightarrow t=0$

$x=1=\sin t \Rightarrow t=\pi/2.$

(i) $\int \underbrace{\cos t}_{f} \cdot \underbrace{\cos t}_{g'}\,dt$. Man kann PI benutzen (im Skript)

⋮

14

(2) $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$

$= 2\cos^2 t - 1$

$$\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2t + 1 \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2} + t \,\Big|_0^{\pi/2} \right].$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

(3) Man kann merken dass mit der Subst. $x = \cos(t)$

$dx = -\sin t \, dt$

$\sqrt{1-x^2} = \sin t$

$$-\int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t \, dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt$$

$+$

$$2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1} dt$$

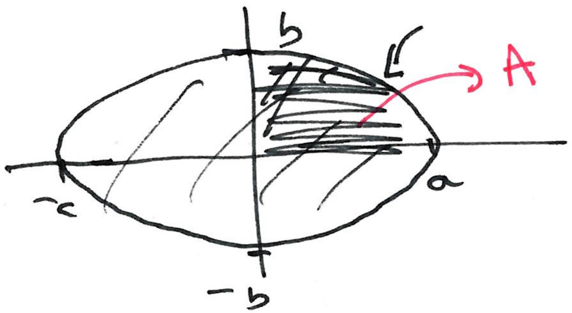
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

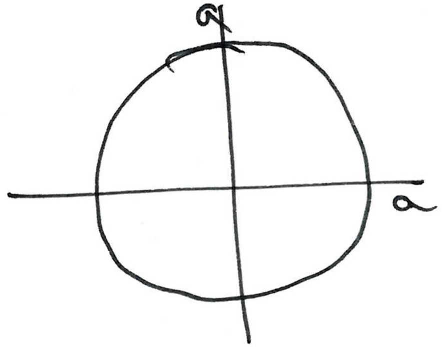
/5

Bsp. Flächeninhalt einer Ellipse $= 4A := \pi a b$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$a = b \longrightarrow$



πa^2.

$$b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = y^2$$

$$\Rightarrow y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

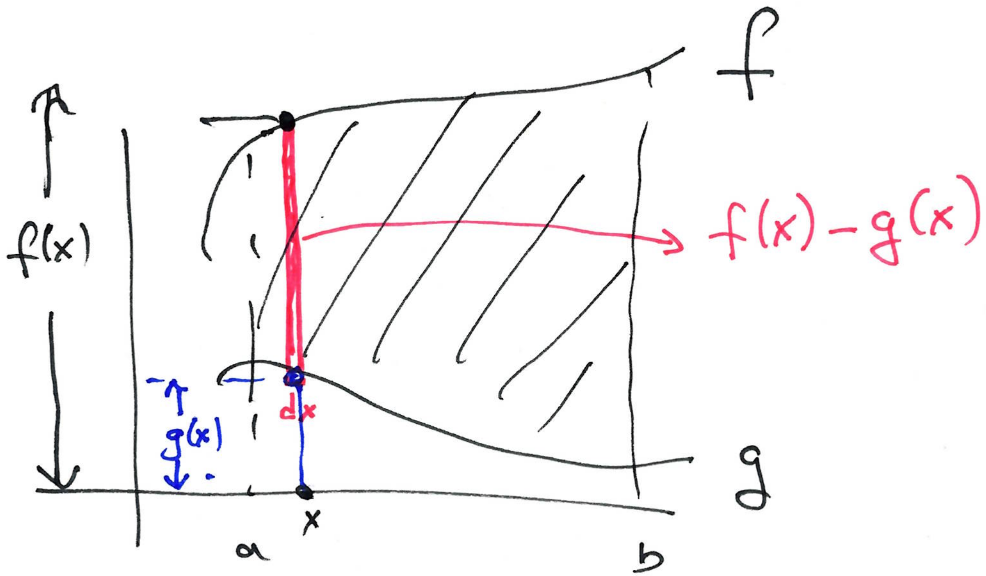
$$A = \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx \qquad \begin{aligned} x &= au \\ dx &= a\, du \end{aligned}$$

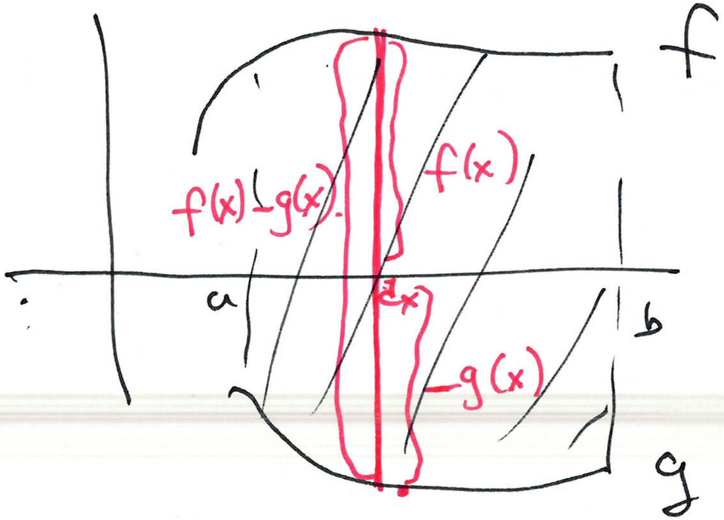
$$= ab \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, du}_{\pi/4} . = ab\frac{\pi}{4}$$

Bsp. Flächeninhalt zwischen

2 Kurven.

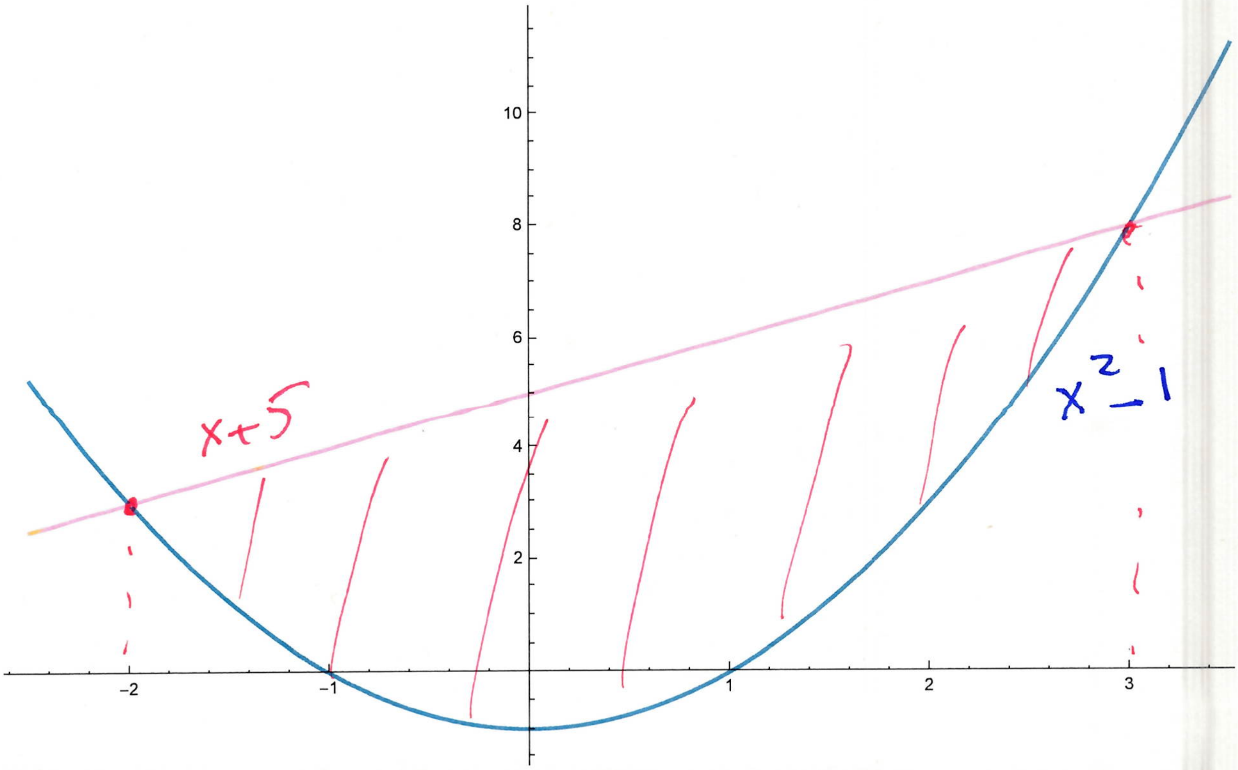
$$\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$





In[2]:= `Plot[{x^2 - 1, x + 5}, {x, -2.5, 3.5} ]`

Out[2]=



`Integrate[-x^2 + x + 6, {x, -2, 3}]`

Out[5]= $\frac{125}{6}$

$$x^2-1 = x+5 \Longrightarrow$$

$$x^2-x-6=0 \Longrightarrow$$

$$(x+2)(x-3)=0 \Longrightarrow$$

$$x=-2, \quad x=3.$$

$$\int_{-2}^{3} (x+5)-(x^2-1)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{3} x+6-x^2\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}+6x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{3} = \cdots = \frac{125}{6}.$$

Bsp. $\displaystyle\int \frac{e^t}{e^{2t}+2e^t+1}\,dt$

$$e^t = x \Rightarrow e^t\,dt = dx$$

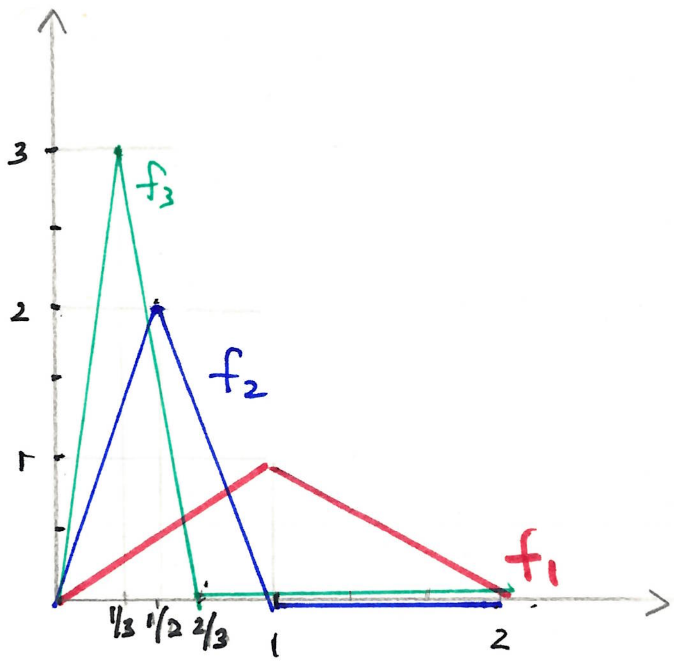
$$\int \frac{dx}{x^2+2x+1} = \int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$x+1=u \Rightarrow dx = du$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}\,du$$

$$= -u^{-1}+C = -\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{e^t+1}+C$$

§5.5. Integration konvergenter Reihen.



$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le 1/n \\ 2n - n^2 x, & \frac{1}{n} \le x \le 2/n \\ 0 & \frac{2}{n} \le x \le 2. \end{cases}$$

$f_n(x) : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}.$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$ punktweise aber nicht glm!

$$\int_0^2 f_n(x)\,dx = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\neq$$

$$\int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^2 0\,dx = 0$$

Satz Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten und integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt, integrierbar und $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx =$

$$\int_a^b \lim f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

d.h: $\int$ und $\lim$ kann man umtauschen

Kor: Sei $f_n : [a,b]$ wie im Satz und sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf $[a,b]$ gleichmässig konvergiert. Dann gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

d.h $\int$, $\sum$ kann man umtauschen.

Kor. Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

Potenzreihe mit

konv. Radius $\rho > 0$

Dann ist für jedes

$0 \le r < \rho$ gilt $\forall x \in (-\rho, \rho)$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

d.h. Man kann Potenzreihen in Ihrem Konvergenzbereich termweise differenzieren und integrieren.

Bsp. Geometrische Reihe

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$|x| < 1$

Dann

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \ln|1+t| \Big|_{t=0}^{t=x}$$

$$= \ln|1+x|$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

$$\ln|1+x| = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad , |x| < 1$$

Mit Arbeit kann man zeigen dass

$$\lim_{x\to 1^-} \ln|1+x| = \ln 2 =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \sum (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = \ln 2}$$

Bsp.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$|x| < 1$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t \Big|_0^x$$

$$= \arctan x$$

$$\int \left(1 - x^2 + x^4 - \dots \right) dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad , |x|<1$$

$$\lim_{x\to 1} \arctan x = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Bsp. $f(x) = e^{-x^2}$

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$

$F'(x) = f(x)$ Hauptsatz der Integral Rechnung

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt = F(1) - F(0)$$

$$= \int_0^1 e^{-t^2} dt$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}}_{\text{konv } \forall x} dt$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}\, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\int_0^x \frac{t^{2n}}{n!}\, dt}_{\left.\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)\,n!}\right|_0^x}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} = g(x).$$

$$= \underbrace{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{\underbrace{5 \cdot 2}_{10}} + \cdots}_{\text{alternierende Reihe mit Konv.-Radius } \rho = \infty}$$

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

$$= x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + - - -$$

Satz (Leibniz) Sei (a_n) mon fallend Folge mit $\lim a_n = 0$

Dann konv. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = S$

und $a_1 - a_2 < S < a_1$

Sei $a_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$

Falls $|x| < 1$, $a_n(x)$ ist mon fallend und $\lim_{n\to\infty} a_n(x) = 0$

Mittels Leibniz Satz für $|x| < 1$ erhalten wir

$$S = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$$

$$a_1 - a_2 < S < a_1 = x$$

$$x - \frac{x^3}{3}.$$

$$x - \frac{x^3}{3} < S = g(x) < x$$

falls $|x| < 1$

$$x - \frac{x^3}{3} < \int_0^x e^{-t^2}\,dt = g(x) < x$$

$, |x| < 1$

Als $x \to 1$, erhalten wir

$$1 - \frac{1}{3} < \underbrace{\int_0^1 e^{-t^2}\,dt}_{} < 1$$

$$\frac{2}{3} < \qquad < 1$$

Bsp.

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + n}_{} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Gross genug n

ist $\sim \frac{n^2}{2}$

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 \approx \frac{n^3}{3}.$$

?

Wir haben gesehen dass falls $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist und eine Folge von Partitionen (P_n) mit $\delta(P_n^{(*)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

und sei (ξ_n) zwischen Punkten.

Dann
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n, \xi_n)$$

$\underline{zB}$ als P_n^{*} kann man die Unif Partition betrachten

$$P_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, b\}.$$

$$\xi^{(n)} = \{\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n\}$$

$$\xi_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right) \quad k=0, \dots n-1$$

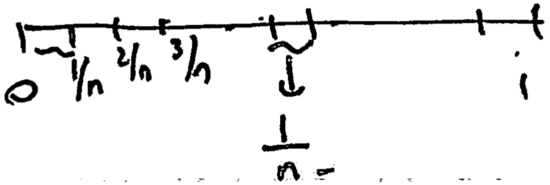
$$S(f, P_n, \xi^{(n)})$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$
$$\longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx.$$

$$\underbrace{\lim \sum_{k=0}^{\infty} f\left(a + \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Bsp. $f(x) = x^m$ in $[0,1]$

$$\int_0^1 x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

Die R. Summe mit Unif. Partition für $f(x) = x^m$



$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \lim S(f, P^n, \xi^n)$$

$$= \lim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^m}{n^m \cdot n} = \lim \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{n-1} k^m$$

$$m=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(0+1+2+\dots+n-1)$$

$$= \frac{1}{2}$$

~~0+1+2...~~

Falls n gross genug ist

$$(0+1+\dots+n-1) \sim \frac{n^2}{2}.$$

$$\frac{1}{n^{m+1}}\left(0+1+2^m+3^m+\dots+(n-1)^m\right)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{m+1}$$

d.h für Gross genug

n, gilt

$$1+2^m+\dots+(n-1)^m \sim \frac{n^{m+1}}{m+1}$$

d.h.

$$1+2^2+\dots+(n-1)^2 \sim \frac{n^3}{3}$$

$$1+2^3+\dots+(n-1)^3 \sim \frac{n^4}{4}$$

Wie Gross ist $n!$?