

Satz Mittelwert Satz der
Integralrechnung
MWSI

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Dann gibt $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b-a)$$

Satz (Cauchy) Seien

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wobei

f stetig, g beschränkt und
integrierbar mit $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

Dann $\exists \xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

Bmk $g=1 \Rightarrow$ MWSI

Defn Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

stetig. Eine Funktion

$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heisst

ein Stammfunktion von f
(Primitive)

falls F stetig differenzierbar
in $[a, b]$ ist und

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Frage: Gibt es immer

ein Stammfunktion

for gegebene f ?

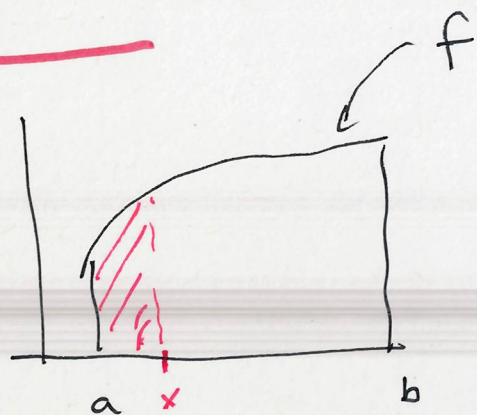
Satz Hauptsatz der (HID) Diff. und Integ. Rechn.

Seien $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
stetig. Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b.$$

ist in $[a, b]$ stetig
differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$



$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

d.h. $\int_a^x f(t) dt$ ist ein

Stammfunktion von f
Riemann integ von f
mit variabler obere Grenze).

Beweis $F(x) := \int_a^x f(t) dt$

z.z. für $x_0 \in [a, b]$

die Ableitung $F'(x_0)$ existiert

$$\text{und } F'(x_0) = f(x_0).$$

Sei $x \in [a, b]$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = : F'(x_0)$$

Existiert dieser Grenzwert?

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t) dt$$

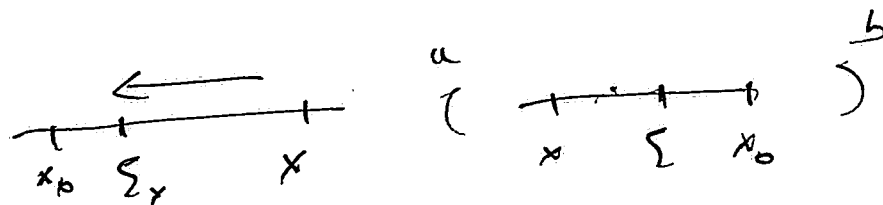
$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \\ &= \int_{x_0}^x f(t) dt \end{aligned}$$

$$\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt$$

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

$$\stackrel{\text{MWSI}}{=} f(\xi) (x - x_0)$$

for ein $\xi \in [x_0, x]$



$$F(x) - F(x_0) = f(\xi) (x - x_0)$$

$$\xi \in [x_0, x].$$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi_x)$$

$$\text{Als } x \rightarrow x_0, \quad \xi_x \rightarrow x_0.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(\xi_x)$$

$$\boxed{F'(x_0) = f(x_0)}$$

Bmk. ① Wegen

HID
Hauptsatz Integ
und Diff
Rechnung

hat jede stetige Funktion
mindestens eine Stammfunktion.

nämlich
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

② Falls F, G 2 Stammfunkt
von f , Dann

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = f(x) \\ \forall x \in [a, b]$$

$$(F' - G')(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow F - G = \text{konstant } C.$$

$$F = G + C \quad \text{für ein konstant } C.$$

Bsp. $f = x$

$$F = \frac{x^2}{2}$$

$$G = \frac{x^2}{2} + 1$$

Satz Fundamental Satz der Analysis

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann gibt es eine Stammfunkt F
von f , die bis auf eine
additive konstant ~~und~~ eindeutig
bestimmt ist und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Beweis Sei $\mathbb{R} = [a, b] \ni x$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Dann $F(b) = \underbrace{\int_a^b f(t) dt}$

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0.$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= F(b) - 0 \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Für beliebige Stammfunkt
 G gilt $G = F + C$

$$G(b) = F(b) + C$$

$$G(a) = F(a) + C$$

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= (F(b) + C) \\ &\quad - (F(a) + C) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Für jede Stammfunkt G
von f gilt

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

Defn. Ein Stammfunktion
von f heisst auch

unbestimmtes Integral
(indefinite Integral)
von f und wird mit

$$\int f(x) dx \text{ bezeichnet}$$

In diesem Fall schreiben
wir $\int f(x) dx = F(x) + C$

Bem. ① Die Integrationskonstante

C deutet an, dass
wir jeder andere
Stammfunkt erhalten können, in

dem wir zu einer
bekannten Stammfunkt eine
beliebige konstante addieren.

②. Die Unbestimmte
Integral kann man als
Umkehr Operation zur
Ableitung interpretieren.

$$F \xrightarrow{\boxed{d/dt}} F' = f$$

$$f \xrightarrow{\boxed{\int}} F = \int f(x) dx.$$

$$f \xrightarrow{\boxed{\int}} F \xrightarrow{\boxed{d/dt}} F' = f$$

Bsp.

<u>Defn</u>	<u>Bereich</u>	<u>Funk. f</u>	<u>Stammfunkt F</u>	<u>Def</u>	<u>f</u>	<u>F</u>
$\mathbb{R}$		e^x	$e^x + C.$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\mathbb{R}$		x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$(0, \infty)$		x^α $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$			
$\mathbb{R}$		$\cos x$	$\sin x + C$			
$\mathbb{R}$		$\sin x$	$-\cos x + C.$			
$(-1, 1)$		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$			
$(-1, 1)$		$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + C$			

$$F(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{-x} & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1/x & x > 0 \\ 1/x & x < 0 \end{cases}$$

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$f(x) = -x, \quad f'(x) = -1$$

Bsp.

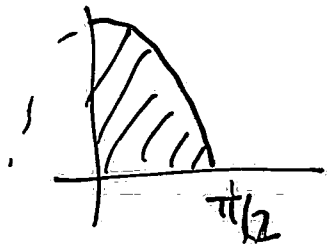
$$\textcircled{1} \int_1^2 x \, dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^2$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}$$

$$= \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \int_0^1 x^2 dx &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\
 &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \int_0^{\pi/2} \cos x dx &= \sin x \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x \Big|_0^1 \\
 &= \arctan 1 - \arctan 0 \\
 &= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Integrationsmethode

Ableitungsregel $\rightsquigarrow$ eine Methode
für das
Integral

Produktregel $\rightsquigarrow$ Partielle
der Ableitung Integration

(Integration
by parts)

Satz (Partielle Integ - PI)

Seien $a < b$ $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
stetig differenzierbar.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) g'(x) dx &= \overbrace{f(b)g(b) - f(a)g(a)} \\ &\quad - \int_a^b f'(x) g(x) dx \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Beweis Sei $H = fg$

Dann

$$H'(x) = \underbrace{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

$\Rightarrow H = fg$ ist eine
Stammfunkt von $f'g + fg'$

$\Rightarrow$ Fund. $\int_a^b (f'g + fg') dx$

$$= H \Big|_a^b$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

$$\Rightarrow \int fg' dx = fg \Big|_a^b - \int_a^b f'g dx$$

Bsp. ① $\int_0^1 \underbrace{x}_{f'} \underbrace{e^x}_{g'} dx$

Setzen wir $f(x) = x$ $g'(x) = e^x$
 $f' = 1$ $g(x) = e^x$

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 1 e^x dx}_{e^x \Big|_0^1}$$

$$= x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = (1 \cdot e^1 - 0) - (e^1 - e^0)$$

$$= e - e + 1 = 1.$$

④
② $\int_0^1 \underbrace{x}_{g'} \underbrace{e^x}_f dx$

$$f(x) = e^x$$

$$f' = e^x$$

$$g'(x) = x$$

$$g(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$= \left. \frac{x^2}{2} e^x \right|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2}{2} e^x dx}_{\text{nicht! einfacher!}}$$

Bmk. Der Schlüsselpunkt
bei der PI ist, die
Funktionen f, g' geeignet

zu wählen, die die Rollen
 f und g' übernehmen.

③. $\int \ln x dx$

Integrand kann man "künstlich"
als ein Produkt schreiben

$$\int \underbrace{(\ln x)}_f \cdot \underbrace{1}_{g'} dx$$

$$f = \ln x$$

$$f' = \frac{1}{x}$$

$$g' = 1$$

$$g = x$$

$$\stackrel{PI}{=} \underbrace{fg} - \int f'g$$

$$x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \cdot dx$$

$$x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$$

$$\textcircled{4} \quad I = \int \underbrace{e^x}_f \underbrace{\cos x}_{g'} dx$$

$$f(x) = e^x$$

$$f' = e^x$$

$$g' = \cos x$$

$$g = \sin x$$

$$I = fg - \int f'g dx$$

$$= e^x \sin x - \int \underbrace{e^x}_f \underbrace{\sin x}_{g'} dx$$

$$f = e^x$$

$$f' = e^x$$

$$g' = \sin x$$

$$g = -\cos x$$

$$= e^x \sin x - \left[e^x (-\cos x) + \int e^x \cos x dx \right]$$

$$\bar{I} = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \cos x dx}_I$$

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - \bar{I}$$

$$2I = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C$$

Methode der Substitution

Ist eine Umkehrung der Kettenregel

Sei $a < b$ $\phi = [a, b]$

stetig differenzierbar

$I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall

mit $\phi([a, b]) \subset I$.

$F: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine
stetige Funk.

$$(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$$

$F \circ \phi$ ist eine Stammfunk.
von $F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$

Falls F eine Stammfunk
von f ist, i.e. $F' = f$

dann ist $F \circ \phi$

ist eine Stammfunk von
 $f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$

$$\Rightarrow \int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = F \circ \phi$$

Satz (Substitution)

Seien $\phi, [a, b]$,
 I wie oben.

$$\phi([a, b]) \subset I$$

und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
eine stetige Funk.

Dann

$$\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt$$

$$= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx.$$