Wie gross ist $n!$?

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$

$$\frac{1}{n}(\log n!) = \frac{1}{n}(\log 1 + \log 2 + \dots + \log n).$$

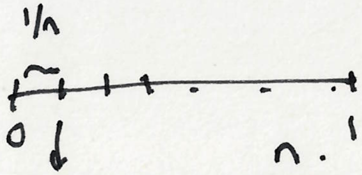
$1 = \frac{1}{n} \cdot n \qquad 2 = \frac{2}{n} \cdot n, \quad \dots$

$$= \frac{1}{n}\Big(\overbrace{\log \tfrac{1}{n} + \log n}^{\log 1} + \overbrace{\log \tfrac{2}{n} + \log n}^{\log 2} + \dots + \underbrace{\log \tfrac{n}{n} + \log n}_{\log n} \Big).$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n} \cdot n \log n}_{\log n} + \underbrace{\frac{1}{n}\Big[\log \tfrac{1}{n} + \log \tfrac{2}{n} + \dots + \log \tfrac{n}{n}\Big]}.$$

Riemm Summe

für $\log x$ in $[0,1]$.



$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}$$

$f(x) = \log x$

$$\frac{\log n!}{n} - \log n$$

$$= \frac{1}{n}\Big[\log \tfrac{1}{n} + \cancel{2}\ \log \tfrac{2}{n} + \dots + \log \tfrac{n}{n}\Big].$$

Als $n \to \infty$

RHS $\frac{1}{n}\Big[\log \tfrac{1}{n} + \dots + \log \tfrac{n}{n}\Big]$

$$\to \int_0^1 \ln x \, dx = x \ln x - x \Big|_0^1 = -1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n!}{n} - \log n = -1$$

Für gross genug n

$$\frac{\log n!}{n} - \log n \approx -1$$

$\sim$ $(a \log x = \log x^a)$

$$\log (n!)^{1/n} - \log n \approx -1$$

$$\log\left[\frac{(n!)^{1/n}}{n}\right] \approx -1$$

$$\Rightarrow \frac{(n!)^{1/n}}{n} \approx e^{-1}$$

$$\Rightarrow (n!)^{1/n} = \frac{n}{e}$$

$$\Rightarrow n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

§5.6. §5.7 (Wir werden überspringen

Man kann beweisen dass

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

§ 5.8 Uneigentliche Integral

Bis jetzt haben wir beschränkte Funktionen auf endliche Intervalen betrachtet.

Wir möchten auf beschränkte Funktionen auf unendliche Intervale oder unbeschränkte Funktionen betrachten.

z.B.
$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$$
bei $x=1$ ist $\frac{1}{(1-x)^2}$ nicht beschränkt

oder
$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x}\,dx}$$

unendliche obere Grenze

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}$$

ε $\to$ bei $x=0$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist nicht beschränkt

Für $\varepsilon>0$, $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Das ist ein Integral von besch. funk auf $[\varepsilon,1]$.

$$\int_\varepsilon^1 x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{1/2}}{1/2}\Big|_\varepsilon^1$$

$$2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} 2-2\sqrt{\varepsilon} = 2$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =: \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ Für jede $b \in [0,\infty)$

$\int_0^b e^{-x}\,dx$ ist definiert

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^b$$

$$= -e^{-b} + 1$$

$$\lim_{b\to\infty} 1 - e^{-b} = 1.$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx := \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx$$

(I) - Wir betrachten "uneigentliche" Integral auf unendliche Integrationsintervale.

<u>Defn</u> Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$

Falls $\boxed{\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx}$ existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit $\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx}$ und sagen dass f <u>auf $[a, \infty)$</u> <u>integrierbar</u> <u>ist</u>

Falls dies Grenzwert existiert sagen wir dass $\int_0^\infty f(x)\,dx$ konvergiert und sonst divergiert

<u>Bsp.</u> (i) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^b \right)$$

$$= \lim_{b \to \infty} 1 - e^{-b} = 1.$$

$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x}\,dx$. konv gegen 1.

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-s}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \begin{cases} \ln|x|\Big|_1^b & s=1 \\ \dfrac{x^{-s+1}}{1-s}\Big|_1^b & s\neq 1 \end{cases}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \begin{cases} \ln|b| & s=1 \\ \dfrac{b^{1-s}}{1-s} - \dfrac{1}{1-s} & s\neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{divergent} & s=1 \\ \text{diverg.} & s<1 \\ \text{konv.} & s>1 \end{cases}$$

Da,

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \begin{cases} \to \infty & 1-s>0 \\ \to \dfrac{1}{s-1} & 1-s<0 \end{cases}$$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ ist divergent für $1-s \geq 0$

ist konvergent für $1-s<0$

In diesem Fall konv. gegen $\dfrac{1}{s-1}$

(3) $\int_0^\infty x e^{-x^2}\, dx$

$$\int_0^b x e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} e^{-u}\, du$$

$x^2 = u$

$2x\, dx = du$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-u} \Big|_0^{b^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-b^2}\right)$$

$$\int_0^\infty x e^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x e^{-x^2}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-b^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Bmk $\int_a^\infty f(x)\, dx$

Es ist oft der Fall dass wir keine explizite Stammfunk. für f angeben können.

zB $f(x) = e^{-x^2}$.

Satz (**Majoranten Kriterium**)

Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$

beschränkt und integrierbar

auf $[a, b]$ $\forall b > a$

1) Falls $|f(x)| \leq g(x)$

$\forall\ x \geq a$ und

$g(x)$ ist auf $[a, \infty)$

integrierbar, so ist

f auf $[a, \infty)$ integrierbar

$$\int_a^\infty |f(x)|\, dx \leq \underbrace{\int_a^\infty g(x)\, dx}_{< \infty.}$$

② Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$

$\forall x \geq a$

und $\int_a^\infty g(x)\, dx$ divergiert,

so divergiert auch

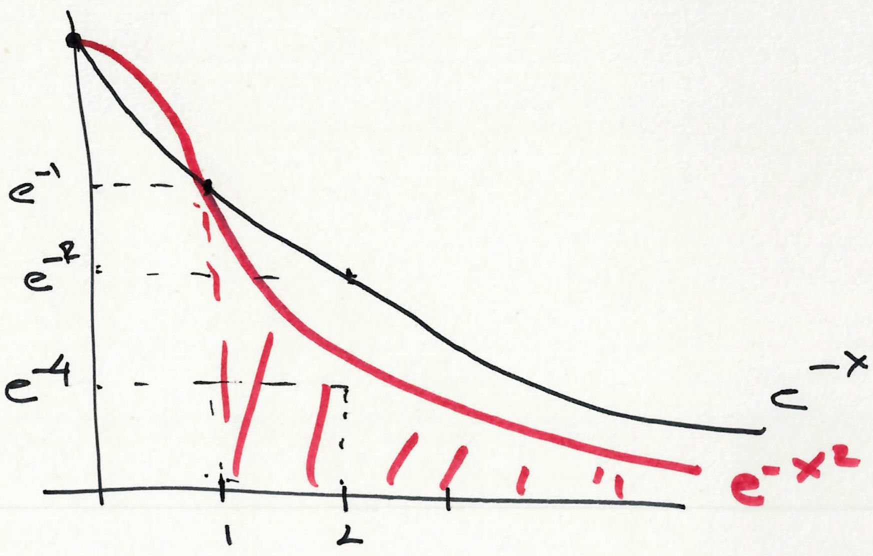
$$\int_a^\infty f(x)\, dx.$$

Bsp. $\int_1^\infty e^{-x^2}\, dx$

Für $x > 1$,

$$e^{-x^2} < e^{-x}$$

$$\int_1^\infty e^{-x^2} < \int_1^\infty e^{-x}\, dx \neq \frac{1}{e}.$$



$$\int_0^\infty e^{-x} = 1$$

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} -e^{-b} + e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}\,dx}_{\text{stetige}} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx}_{\text{integrierbar}}$$

stetige funk. e^{-x^2} (auf kompakt Intervall $[0,1]$) ist integrierbar

da $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx < \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \frac{1}{e} < \infty$

Bsp. Für $\alpha > 0$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx$$

Sei $b > 0$

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx + \underbrace{\int_1^b \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx}$$

$\forall\, x > 1$

$$2x^\alpha \geq 1 + x^\alpha \geq x^\alpha$$

$$\frac{1}{2x^\alpha} \leq \frac{1}{1+x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx}_{\text{div. für } \alpha \leq 1} \leq \int_1^\infty \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx \leq \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx}_{\text{konv für } \alpha > 1}$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx \quad \text{konv. für } \alpha > 1, \quad \text{div. für } \alpha \leq 1.$$

~~Satz~~ (Integral test)

Satz Sei $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ monotone fallend. Dann konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x)$$

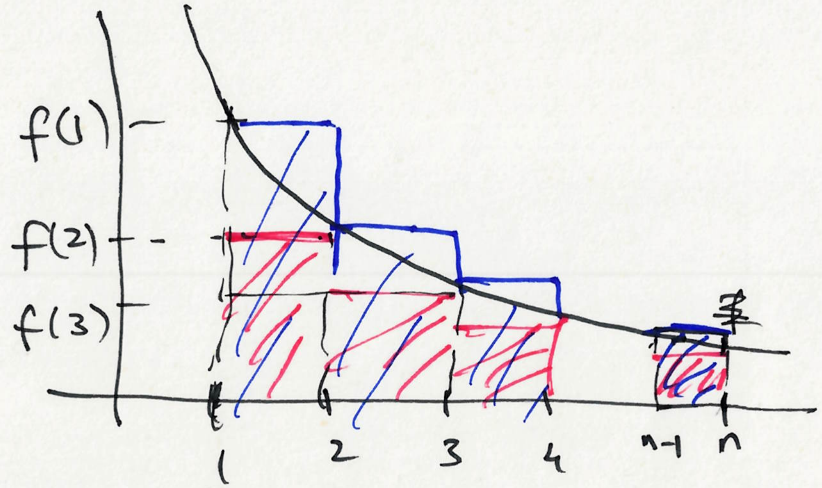
genau dann wenn

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

konvergiert und in diesem Fall gilt

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(x) - \int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq f(1)$$

Beweis



$$f(1) + f(2) \cdots + f(n-1)$$

$$\geq \int_1^{n} f(x)\,dx$$

$$\geq f(2) + f(3) + \cdots + f(n).$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n) \geq \int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1)}$$

(*)

$$\leq f(n) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1)$$

(**)

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x)\,dx$$

folgt dass $\sum_{n=1}^{\infty} f(x) < \infty$

$$\Longrightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx < \infty .$$

$$\int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$$

Dann auch $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$

und folgt in ~~dessen~~ der Fall der Konvergenz dass (**)

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^\infty f(x)\,dx \leq f(1)$$

<u>Bsp.</u> $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

konv für $s > 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^s}\,dx$$

$$= \lim \begin{cases} \log|b| & s=1 \\ \left.\frac{x^{1-s}}{1-s}\right|_1^b & s \neq 1 \end{cases}$$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx$ konv für $s>1$ gegen $\frac{1}{s-1}$ (div. für $s \leq 1$).

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx}_{\frac{1}{s-1}} \leq 1$$

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \frac{1}{s-1} \leq 1$$

$$\frac{1}{s-1} \leq \sum \frac{1}{n^s} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{s-1}}_{\frac{s}{s-1}}$$

$(s > 1)$

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

$$\frac{1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \frac{3}{2}$$

Bmk. ① $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

$$= \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{a} f(x)\,dx$$

$\forall\ b \leq a$.

② $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ konv.

$$= \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{a} f(x)\,dx + \lim_{B \to \infty} \int_{a}^{B} f(x)\,dx$$

Falls Beide Grenzwerte existieren.

Bsp. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^s}$

$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^s}$ mon fallend für $x \geq 2$.

$\sum_{2}^{\infty} \ldots$ konv

$\iff \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^s}\,dx$ konv.

$$\int_{2}^{b} \frac{1}{x(\log x)^s}\,dx \underset{(}{=} \int_{\log 2}^{\log b} \frac{1}{u^s}\,du$$

$u = \log x$,

$du = \frac{dx}{x}$.

$$\int_{\log 2}^{\log b} \frac{1}{u^s}\, du \underset{b\to\infty}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} \text{konv falls } s>1 \\ \text{div. fall } s \leq 1 \end{array}$$

mit

$\Longrightarrow$ Integral test

erhalten wir dass

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^s} \text{ konv} \iff s>1.$$

II. Wir betrachten "uneigentliche" Integrale) mit unbeschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

<u>Defn</u>. Sei

$$f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

eine Funktion, der auf jedem Intervall $[a+\varepsilon, b]$ $\forall\, \varepsilon > 0$ beschränkt und integrierbar.

$f: (a, b] \to \mathbb{R}$

ist integrierbar falls

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

existiert

$$= \lim_{c \to a^+} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

existiert

Und diesem Fall wird den Grenzwert mit

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet

Analog falls f auf jedem Intervall ($f: [a, b) \to \mathbb{R}$) $[a, b-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ beschränkt und integrierbar ist, ist $f: [a, b) \to \mathbb{R}$ integrierbar falls

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{c \to b^+} \int_a^{c} f(x)\,dx$$

existiert.

<u>Bmk</u> Majoranten Kriterium gilt auch für solche uneigentliche Integrale

ch

Falls $|f(x)| \leq g(x)$

$\forall x \in [a, b]$

und $\int_a^b g(x)\,dx < \infty$

$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx < \infty$.

Bsp. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

$f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$

Für $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} -\ln|\varepsilon| & \alpha = 1 \\ \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}. & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Falls $1 - \alpha > 0$ folgt

$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-\alpha} = 0$

Falls $1 - \alpha < 0 \Longrightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-\alpha} = \infty$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{divergent} & \alpha \geq 1 \\ \text{konv gegen } \frac{1}{1-\varepsilon} & \alpha < 1 \end{cases}$$

Folglich

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{div. für} & \alpha \geq 1 \\ \text{konv. für} & \alpha < 1 \\ \downarrow & \\ \frac{1}{1-\alpha} & \end{cases}$$

Bsp: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

$$= \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx}_{\text{div für } \alpha \geq 1} + \underbrace{\lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx}_{\text{div. } \alpha \leq 1}$$

Bsp. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx.$

$$= \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^\varepsilon \frac{1}{x}\,dx + \lim_{b \to 0} \int_b^1 \frac{1}{x}\,dx$$

Beide Grenzwerte müssen existieren für konvergenz

Bsp. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

definiert als

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx + \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)\,dx$$

Für konvergenz von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Beide Grenzwerte ~~müssen~~ existieren müssen.

Bsp. $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx \neq$

$$\cancel{\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} x\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_{-b}^{b} = \lim_{b\to\infty} 0 = 0}$$

$$\lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to-\infty}} \int_a^b x\,dx$$

Im Allg. Sei f eine Funk. auf einem offene Interval (a,b) deren Einschränkung auf kompakte Intervale $[\tilde{a},\tilde{b}] \subset (a,b)$ integrierbar ist. Dann ist das uneigentlichle Integral von f von a bis b

definiert als

$$\lim_{A \to a} \lim_{B \to b} \int_A^B f(x)\,dx.$$

Falls die beide Grenzwerte existieren sagen wir dass f über (a, b) integrierbar ist.

(a, b kann $\pm\infty$ sein).