

§4. Differenzierbare Funktionen

Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

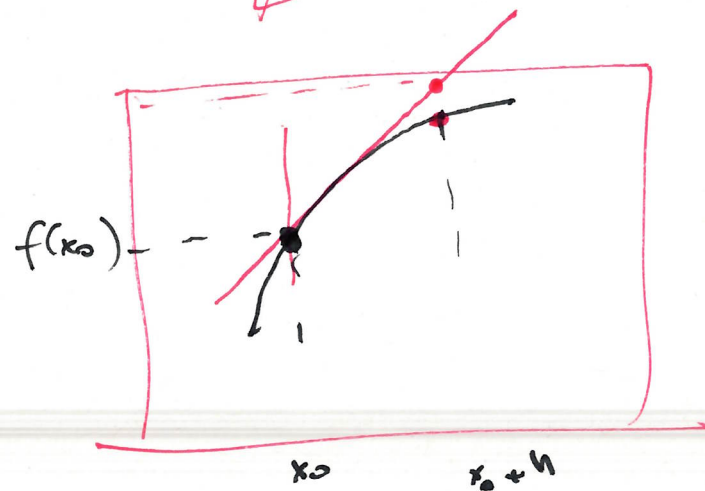
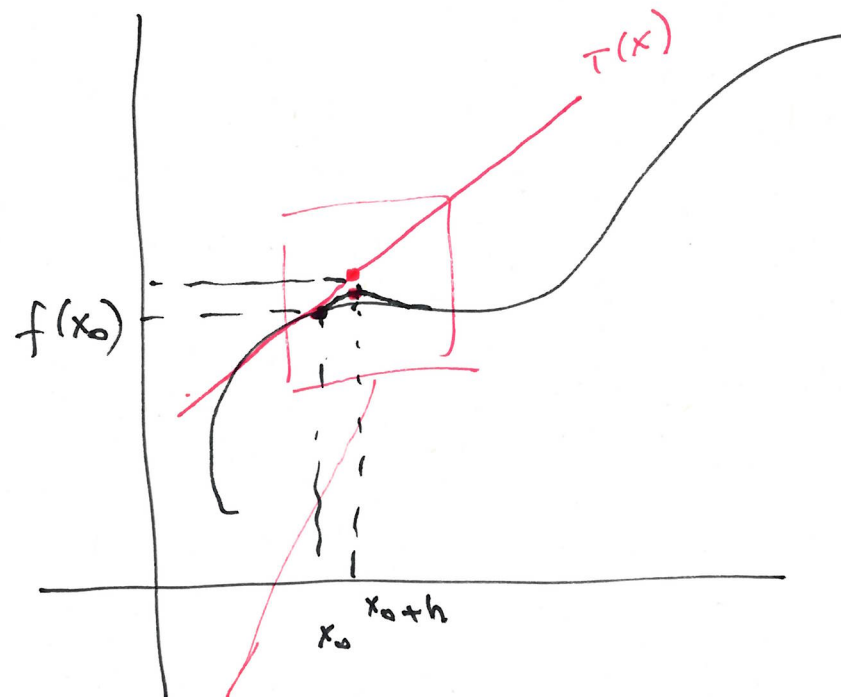
Der Begriff der Ableitung.

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

und $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben.

Wir wollen f in der Nähe von x_0 durch eine Gerade approximieren.

Die Tangente an den Graphen von f durch $(x_0, f(x_0))$ stellt eine gute Approximation dar.



$$T(x) = mx + b = y$$

$$T(x_0) = f(x_0)$$

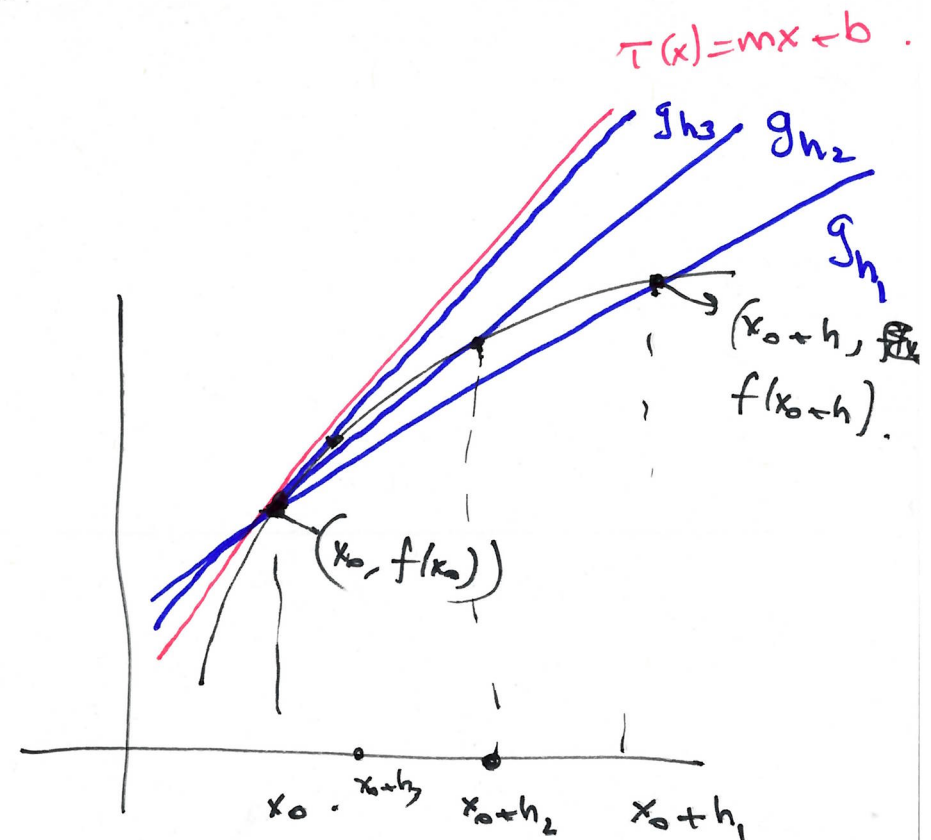
$$T(x_0) = f(x_0) = mx_0 + b.$$

Was ist m ? Die Steigung der Tangente?

Falls wir m wissen,
dann wissen wir auch b
da $b = f(x_0) - mx_0$.

Idee = Wir erhalten diese
geometrisch aus der Sekante
von f durch $(x_0, f(x_0))$
 $(x_0+h, f(x_0+h))$

In dem wir den Grenzübergang
 $h \rightarrow 0$ vornehmen.



$$T(x) = \lim_{h \rightarrow 0} g_h.$$

$$g_h(x) = f(x_0) + \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right) (x - x_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} g_h(x) = f(x_0)$$

$$+ \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right) \right] (x - x_0).$$

$$T(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Bem. wir betrachten den sogenannten Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

= die Steigung der Sekante

Wollen wir die Steigung der Tangente als Grenzwert von $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ (als $h \rightarrow 0$)

bestimmen (erhalten).

Defn $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$

$x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D .

f heißt differenzierbar in x_0

Falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ existiert.}$$

In diesem Fall wird dieser Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet

und es heisst die Ableitung
von f im Punkt x_0 .

Notation $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$

$(Df)(x_0)$

Defn $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heisst
auf D differenzierbar, falls für
jeden Häufungspunkt $x_0 \in D$
 f in x_0 differenzierbar ist.

In diesem Fall, definiert die
Kollektion aller $x_0 \mapsto f'(x_0)$

eine neue Funktion

Die Funktion $f' = D \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f'(x)$

heisst die Ableitungsfunktion von f

Bmk. Der Graph einer
differenzierbaren Funktion

lässt sich ~~durch~~ linear

durch eine Tangente annähern.
Die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$
 $T(x)$

hat die Gleichung

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$T(x)$ ist eine 'Gute Näherung'
für $f(x)$ in einer Umgebung

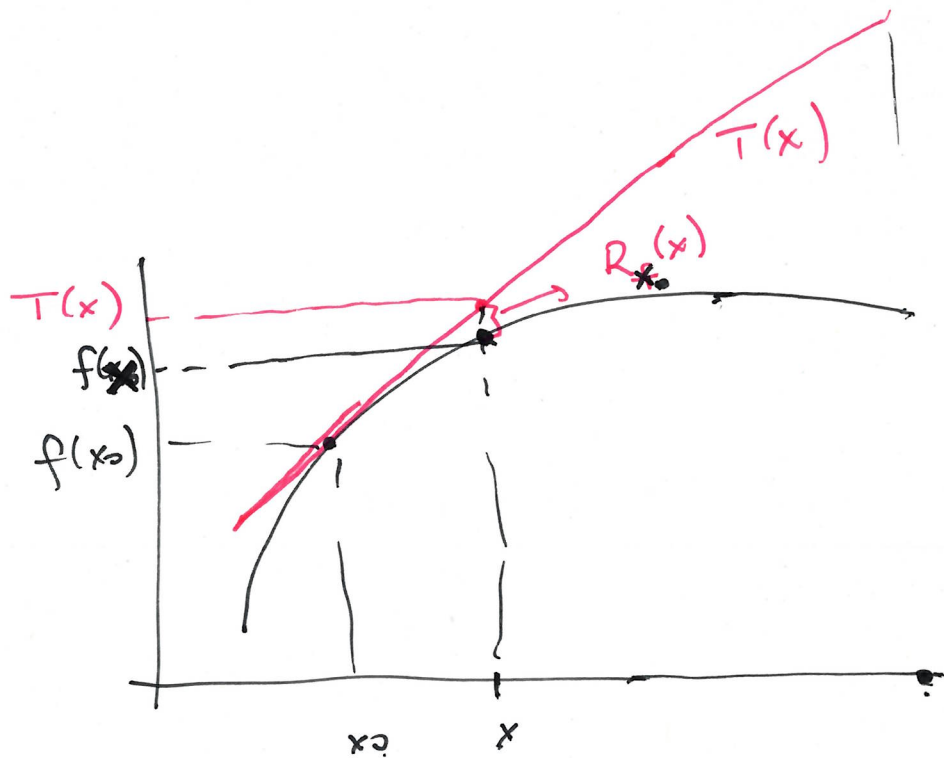
von x_0 .

Wieso?

$$y = T(x) = \underbrace{f(x_0)}_{y_0} + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$



Sei $f(x) = \underbrace{T(x)}_{x_0} + R_{x_0}(x)$

$$= [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] + R_{x_0}(x).$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + R_{x_0}(x)$$

Falls $x - x_0 \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \frac{R_{x_0}(x)}{x - x_0}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} = f'(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{x_0}(x)}{x - x_0}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{x_0}(x)}{x - x_0} = 0}$$

$$(x = x_0 + h.)$$

d.h. wenn $x \rightarrow x_0$ strebt,
strebt der Restglied (Fehler)
nach Null schneller als
 $x - x_0$ nach Null strebt!

$$\text{Sei } r(x) = \begin{cases} \frac{R_{x_0}(x)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$$

$$\text{Dann } \lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0 = r(x_0)$$

$\Rightarrow r(x)$ ist im Punkt x_0
stetig.

$$f(x) = \cancel{f(x)} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

d.h. falls f in x_0 diffbar
ist, dann es gibt

$$\text{ein } c \in \mathbb{R} \quad (c = f'(x_0))$$

und $r: D \rightarrow \mathbb{R}$ ein in

x_0 stetige Funktion $r(x)$ mit

$$\textcircled{1} \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

$$\textcircled{2} \quad r(x_0) = 0.$$

$c = f'(x_0)$ ist eindeutig bestimmt.

Wir haben eine Richtung des
folgenden Satzes bewiesen.

Satz (Weierstrass)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$
Häufungspunkt von D . Folgende
Aussagen sind äquivalent

- (I) f ist in x_0 differenzierbar
(II) $\exists c \in \mathbb{R}$, und $r: D \rightarrow \mathbb{R}$
mit
$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

und $r(x_0) = 0$ und r ist in
 x_0 stetig.

Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$
~~stetig~~ eindeutig bestimmt.

Beweis (I) $\Rightarrow$ (II) Schon oben
gemacht
(II) $\Rightarrow$ (I) Übung.

Bsp. ① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto k$

$k \in \mathbb{R}$.

konstante Funktion

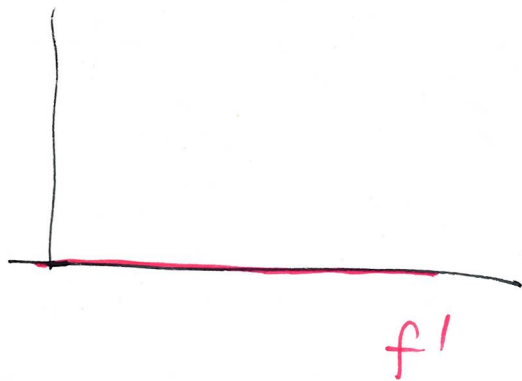
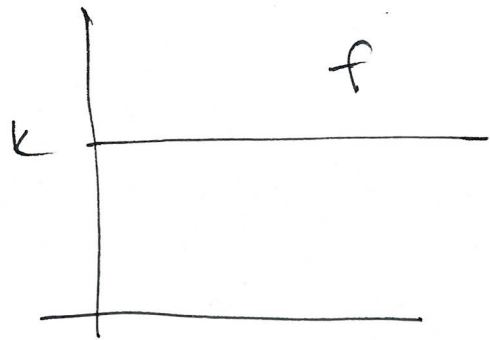
$x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(x_0) = k - k = 0$

Somit
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{0}{x - x_0} = 0.$$

$\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$

$\Rightarrow f$ ist in alle Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$
differenzierbar, mit $f'(x_0) = 0$.

d.h. $f(x)=k \Rightarrow f'(x)=0$



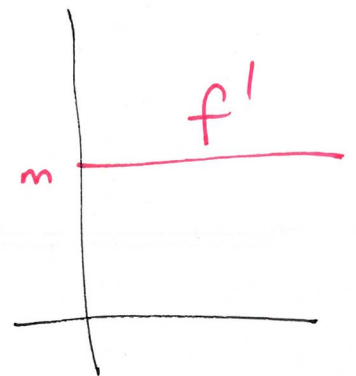
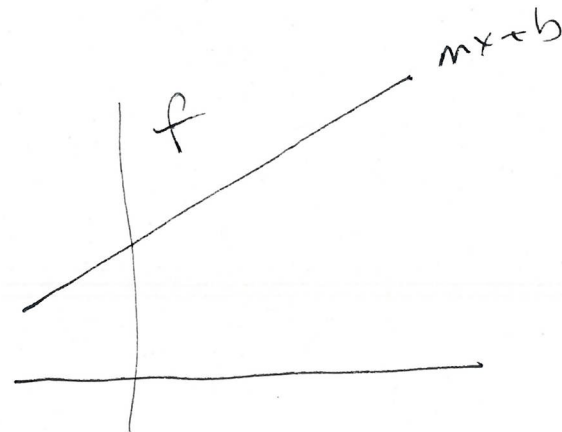
Bsp. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto mx+b,$

ist überall differenzierbar
 mit $f'(x)=m.$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(mx+b) - (mx_0+b)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x-x_0)}{(x-x_0)} = m.$$



③ $f(x) = x^2$ f ist diff. bar
 $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2x$$

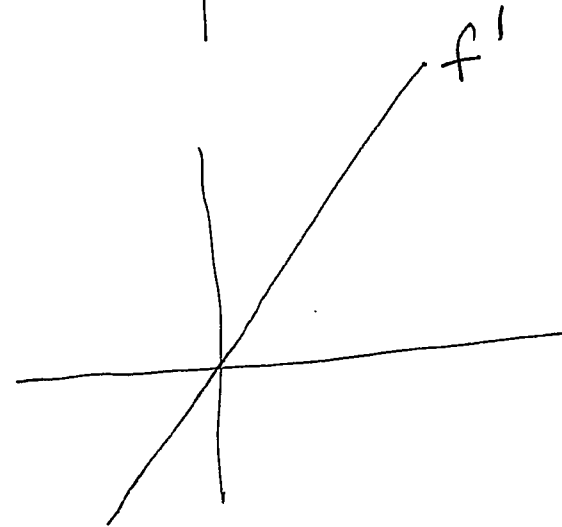
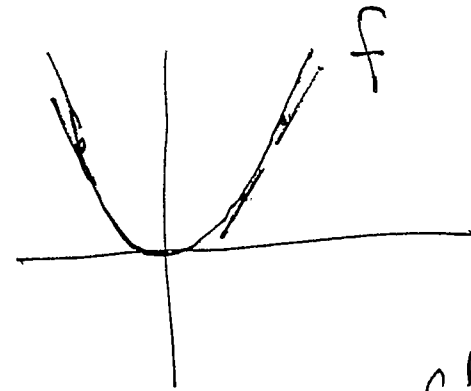
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - (x_0)^2}{h}$$

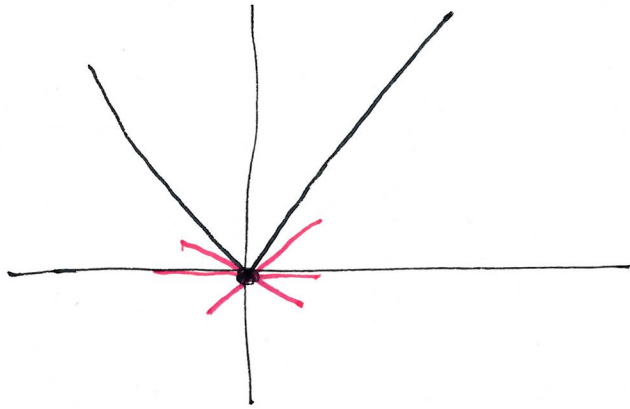
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2hx_0 + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h = 2x_0$$



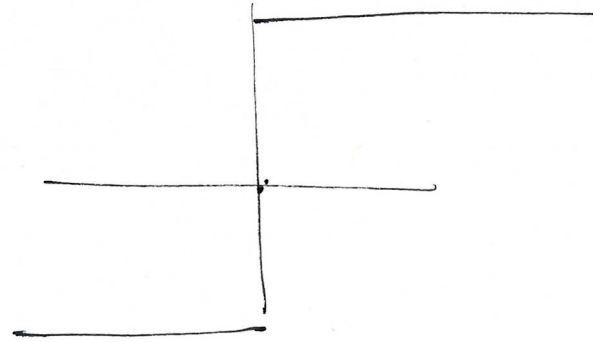
$$\textcircled{4} f(x) = |x|$$

ist für alle $x \neq 0$ diff. bar
aber nicht für $x = 0$.



$$f(x) - f(0) = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

$$g(x) \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$



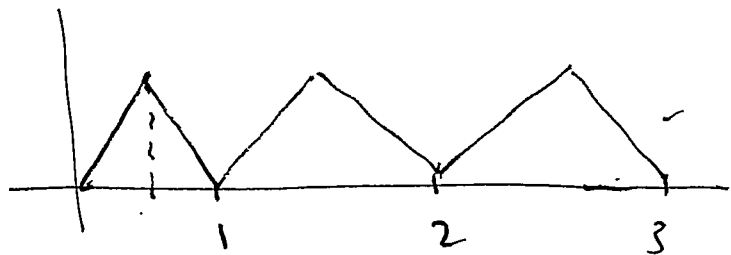
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ existiert NICHT!}$$

Bsp. (Von der Waerden)

Sei für $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \langle x \rangle := \text{Distanz von } x \text{ zur nächsten ganzen Zahl}$$

$$= \min \{ |x - m| \mid m \in \mathbb{Z} \}.$$



$$g_1 = x \mapsto \frac{g(10x)}{10}$$

$$= \min_{m \in \mathbb{Z}} \left| x - \frac{m}{10} \right|$$

$$g_n = x \mapsto \frac{g(10^n x)}{10^n}$$

$$= \min_{m \in \mathbb{Z}} \left| x - \frac{m}{10^n} \right|$$



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle 10^n x \rangle}{10^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$$

Memo kann zeigen dass
 f ist in jeder punkt
 $x \in \mathbb{R}$ stetig

aber in keinem Punkt
 differenzierbar.

f ist in x_0 diff.-bar

$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, r: D \rightarrow \mathbb{R}$$

s.d

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

r stetig in x_0 , $c = f'(x_0)$

Wir setzen $\phi(x) := f'(x_0) + r(x)$

Satz

f ist in x_0 diff

$(\Rightarrow) \exists \phi: D \rightarrow \mathbb{R}$ die in x_0 stetig ist und

gilt
$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0).$$

In diesem Fall $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

Kor Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
 $x_0 \in D$ Häufungspunkt

Falls f in x_0 diff.-bar ist,
so ist f stetig (in x_0)

f diff.-bar $\Rightarrow$ f in x_0 stetig.
in x_0

Bemk. f in x_0 stetig $\not\Rightarrow$ f in x_0 differenzierbar.

Bsp $f(x) = |x|$ ist
in 0 stetig aber nicht
diff.-bar.

Beweis (Kor) f ist in x_0
diff.

$\Rightarrow \exists \phi(x)$ stetig in x_0

s.d.

$$(*) f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$$

(stetig in $x_0 \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert
und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$)

mittels (*).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \\ &+ \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x)(x - x_0) \\ &= f(x_0) + \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x)}_{\phi(x_0)} \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)}_{0}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Bsp. $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
ist diffbar auf $\mathbb{R}$

mit $\boxed{\exp'(x) = \exp(x).}$

Beweis Sei $x_0 \in \mathbb{R}$

$$x = x_0 + h, \quad h \neq 0$$

$$\begin{aligned} \exp(x_0 + h) - \exp(x_0) &= f(x_0 + h) - f(x_0) \\ &= \exp(x_0) \exp h - \exp(x_0) \\ &= \exp(x_0) [\exp(h) - 1]. \end{aligned}$$

$$\frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} = \exp(x_0) \underbrace{\left[\frac{\exp h - 1}{h} \right]}_{\downarrow 1}.$$

1/2

$$\exp h = 1 + \frac{h}{1} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots$$

$$\exp h - 1 = h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{\exp h - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots$$

$$\left| \frac{\exp h - 1}{h} - 1 \right|$$

$$= |h| \left[\frac{1}{2!} + \frac{|h|}{3!} + \dots \right]$$

$$\leq |h| \left[1 + |h| + \frac{|h|^2}{2!} + \dots \right]$$

$$= |h| \underbrace{\exp(|h|)}_{\geq 1}$$

$$\text{Als } h \rightarrow 0 \quad \left| \frac{\exp h - 1}{h} - 1 \right| \rightarrow 0.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h}$$

$$= \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\exp h - 1}{h} \right)$$

$$\underbrace{\quad}_{1.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\exp'(x_0) = \exp(x_0)}$$

$$\underline{\text{Bsp.}} \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$\text{und } (\cos x)' = -\sin x$$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \frac{(\sin x \cosh + \cos x \sin(h)) - \sin x}{h}$$

$$= \sin x \left[\frac{\cosh - 1}{h} \right] + \cos x \cdot \frac{\sinh}{h}$$

Analog zu $\frac{e^{ph} - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$

kann man zeigen dass $\frac{\cosh - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ (Übung)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \frac{\sinh}{h}$$

$$= \cos x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h}}_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin'(x) = \cos x}$$

Satz Sei $D \subset \mathbb{R}$ $x_0 \in D$
ein Häufungspunkt von D

$f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0
differenzierbar.

① $f \pm g$ in x_0 differenzierbar
und $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

② fg in x_0 differenzierbar.

$$\boxed{(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}$$

③ Falls $g(x_0) \neq 0$, ist $\frac{f}{g}$ in x_0
diff. bar.

und $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Bsp. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Analog $(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' \quad x \neq \pi \mathbb{Z}$

$$= \frac{-1}{\sin^2 x}$$

Bsp. $(x^n)' = n x^{n-1}$

Beweis Induktion

$$(x^0)' = 0$$

$$(x^1)' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

Wir nehmen an dass

$$(x^{n-1})' = (n-1) x^{n-2}$$

$$x^n = x \cdot x^{n-1}$$

$\Rightarrow$ Produktregel

$$(x^n)' = (x')(x^{n-1}) + x(x^{n-1})'$$

$$= 1 \cdot x^{n-1} + x(n-1)x^{n-2}$$

$$= x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1}$$

Satz 2 (Kettenregel) (Chain rule)

Seien $D, E \subset \mathbb{R}$ $x_0 \in D$
Häufungspunkt
von D .

$f: D \rightarrow E$ in x_0 diff.-bar
so dass $y_0 = f(x_0)$ ein
Häufungspunkt von E ist.

Sei $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ in y_0
differenzierbar. Dann ist

$g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0
diff.-bar.

und $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Bsp. ① $\exp(\underbrace{x^3 + \sin x}) = h$

$$g = \exp$$

$$f = x^3 + \sin x$$

$$h = (g \circ f)$$

$$h'(x) = \exp'(x^3 + \sin x) \cdot (x^3 + \sin x)'$$
$$= [\exp(x^3 + \sin x)] \cdot (3x^2 + \cos x)$$

② $(17x^7 + x^5 + 2 + e^x)^{2025} = f$

$$f' = (2025)(17x^7 + x^5 + 2 + e^x)^{2024}$$
$$\cdot (17x^7 + x^5 + 2 + e^x)'$$

$$= 2025 (\dots)^{2024} \cdot ((17 \cdot 7)x^6 + 5x^4 + e^x)$$

117

Kor Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

bijektiv, $x_0 \in D$

Wir nehmen an dass f in
 x_0 diff. bar und $f'(x_0) \neq 0$

Zudem nehmen wir an

f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig.

Dann ist y_0 ein Häufungspunkt
von $\mathbb{R}$, f^{-1} ist in y_0 diff. bar

$$\text{und } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$