# Zentrale Sätze über die erste Ableitung

**Satz** Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. $f$ ist in $(x_0)$ differenzierbar. Dann

① Falls $f'(x_0)>0$, gibt es $\delta>0$ mit $f(x)>f(x_0)$ $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ und $f(x)<f(x_0)$ $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$

② Falls $f'(x_0)<0$, gibt es $\delta>0$ mit $f(x)<f(x_0)$ $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ und $f(x)>f(x_0)$ $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$

③ Falls $f$ in $x_0$ ein lok. Extrema hat, dann gilt $f'(x_0)=0$.

**Satz (Rolle)** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und in $(a,b)$ differenzierbar. Falls $f(a)=f(b)$, dann gibt es $\xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=0$

**Satz (Mittelwertsatz) (MSW)**

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, in $(a,b)$ diff.bar. Dann gibt es $\xi\in(a,b)$ mit

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

**Kor** Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig in $(a,b)$ diff.bar.

① Falls $f'(\xi)=0$ $\forall\,\xi\in(a,b)$, dann ist $f$ konstant

② Falls $f'(\xi)=g'(\xi)$ $\forall\,\xi\in(a,b)$, dann gibt es $c\in\mathbb{R}$ mit $f(x)=g(x)+c$

③ Gilt für alle $x\in(a,b)$ dass

$f'(x)>0$, dann ist $f$ streng mon $\nearrow$

$f'(x)\geq 0$ —————— $f$ mon. $\nearrow$

$f'(x)<0$ — — — $f$ streng mon $\searrow$

$f'(x)\leq 0$ - - - $f$ mon $\searrow$.

④ Fall es $M>0$ gibt mit $|f'(\xi)|\leq M$ $\forall\,\xi\in(a,b)$, dann folgt $\forall x,y\in(a,b)$

$$|f(x)-f(y)|\leq M\,|x-y|$$

# Trigonometrische Funktionen

$\sin : [-\pi/2, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

bijektive

$\sin'(x) > 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\boxed{\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$

bijektive

$\cos'(x) = -\sin x < 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$$\boxed{\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

$\tan'(x) = 1/\cos^2 x > 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\boxed{\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}}$$

$\cotan : (0, \pi) \to \mathbb{R}$

$\cotan'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$\operatorname{arccotan} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

$$\boxed{\operatorname{arccot}'(y) = -\frac{1}{1+y^2}.}$$

## Hyperbol Funktionen

- $\boxed{\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}} : \mathbb{R} \to [1, \infty)$

$\boxed{\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\boxed{\tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$

Dann gelten ① $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

② $\sinh'(x) = \cosh(x)$

③ $\cosh'(x) = \sinh(x)$

④ $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

## Die Umkehr (Area) Funktionen

- $\operatorname{arccosh} : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\boxed{\operatorname{arccosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}}$

- $\operatorname{arcsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

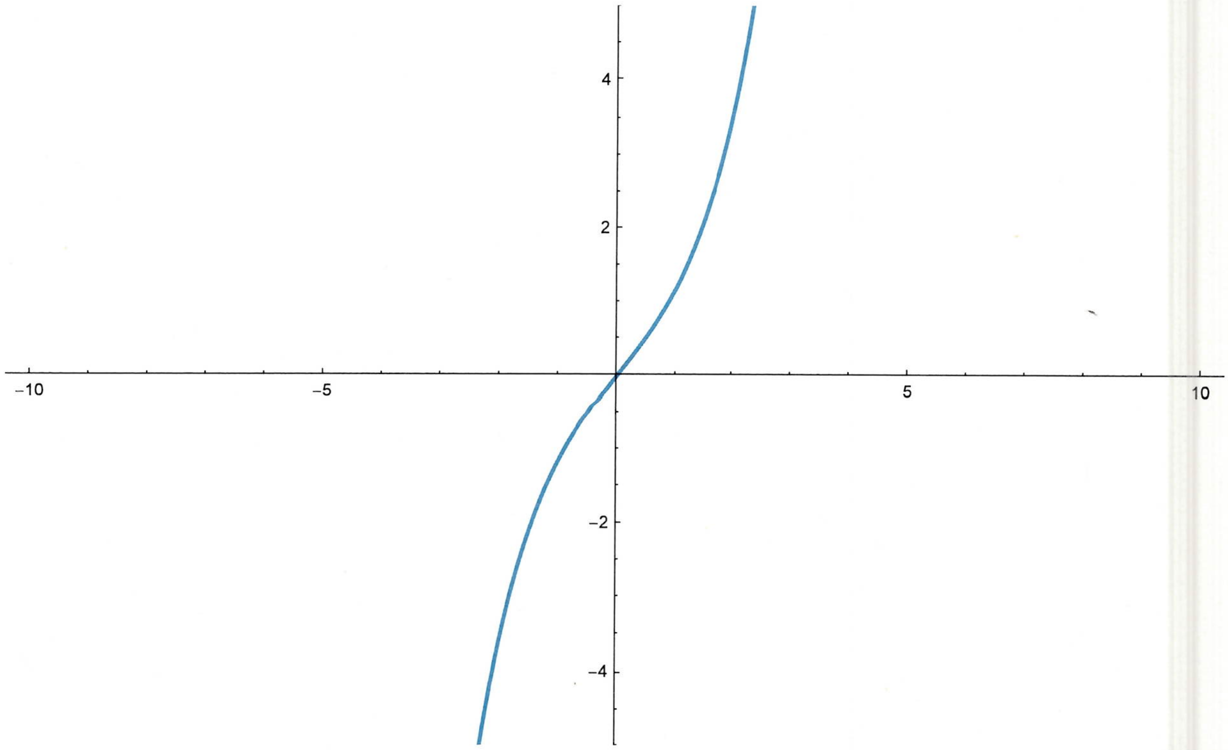
$\boxed{\operatorname{arcsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}}$

- $\operatorname{arctanh} : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\boxed{\operatorname{arctanh}'(y) = \frac{1}{1 - y^2}}$

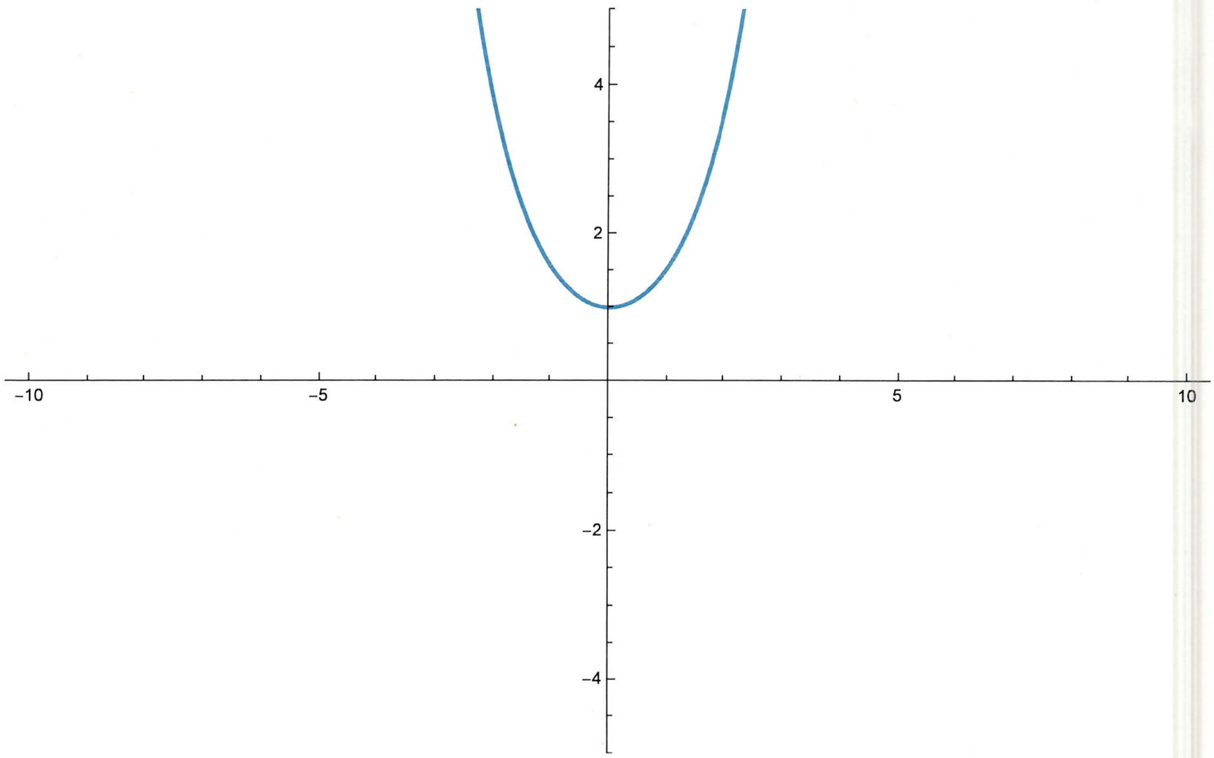
In[3]:= `Plot[Sinh[x], {x, -10, 10}, PlotRange → {-5, 5}]`

Out[3]=



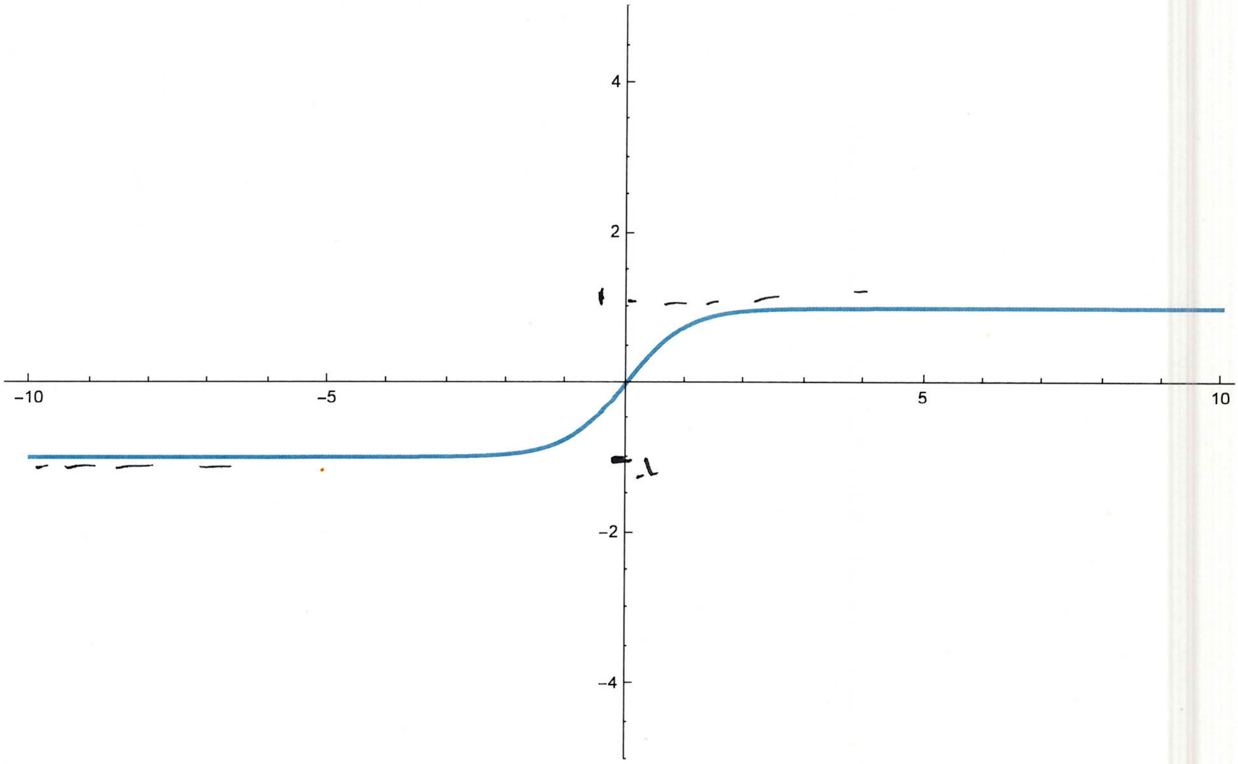

In[6]:= `Plot[Cosh[x], {x, -10, 10}, PlotRange → {-5, 5}]`

Out[6]=



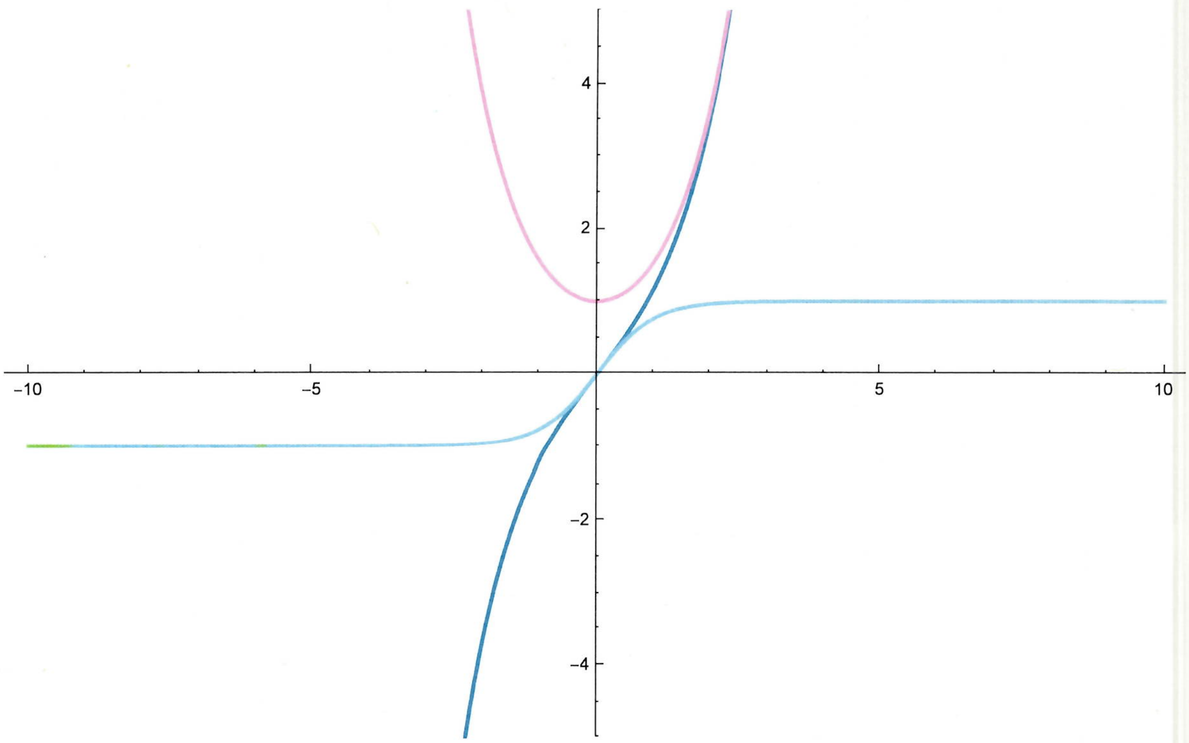
In[8]:=
```
Plot[Tanh[x], {x, -10, 10}, PlotRange → {-5, 5}]
```

Out[8]=



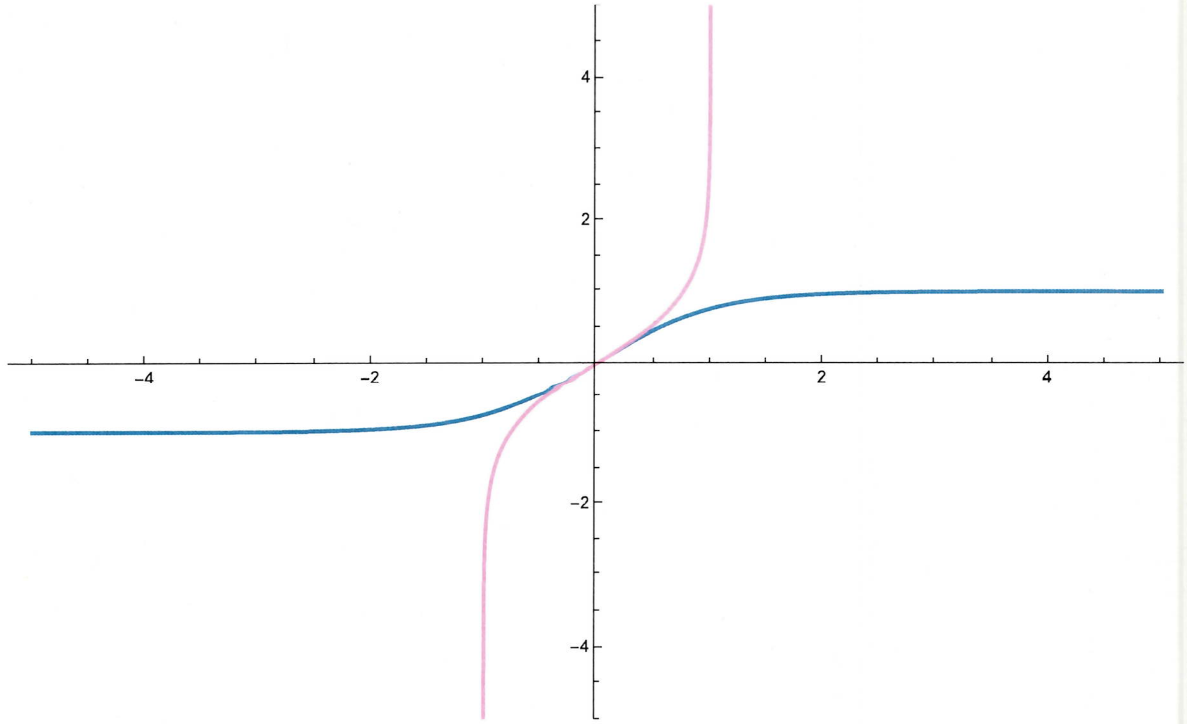

In[9]:=
```
Plot[{Sinh[x], Cosh[x], Tanh[x]}, {x, -10, 10}, PlotRange → {-5, 5}]
```

Out[9]=



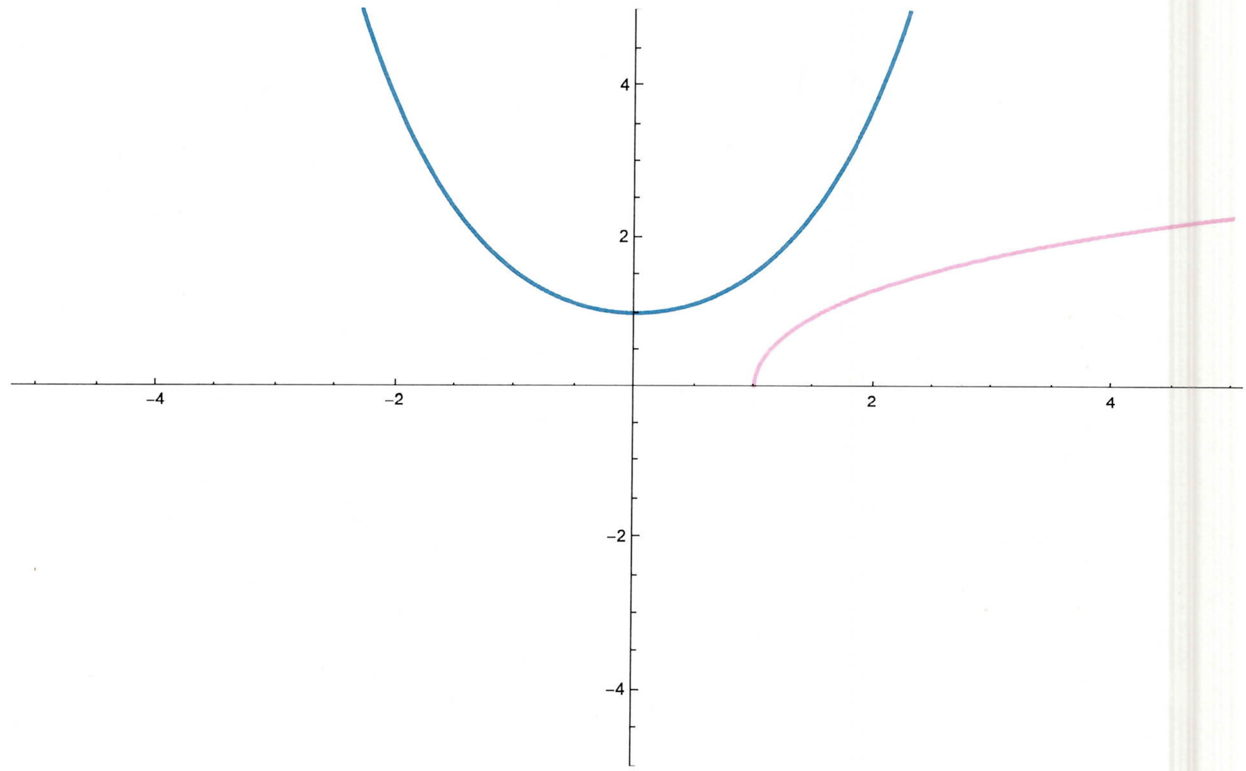
In[14]:=
```
Plot[{Tanh[x], ArcTanh[x]}, {x, -5, 5}, PlotRange → {-5, 5}]
```

Out[14]=



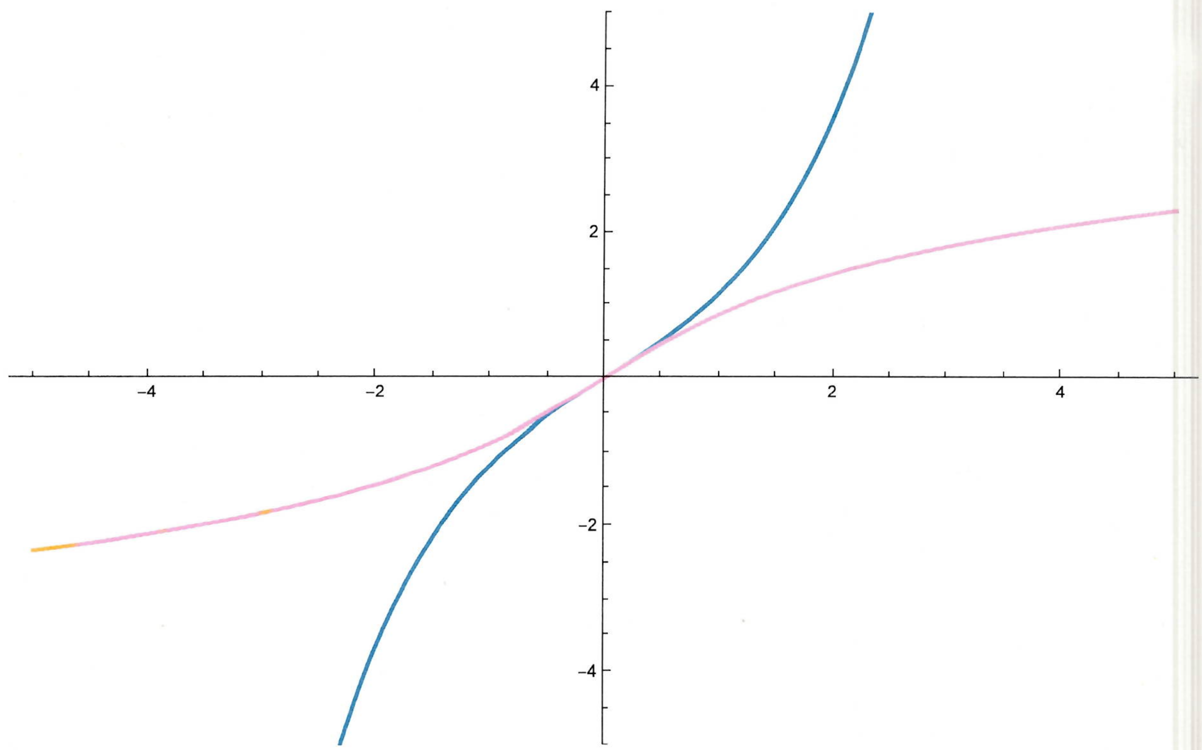
In[12]:= 
```
Plot[{Cosh[x], ArcCosh[x]}, {x, -5, 5}, PlotRange → {-5, 5}]
```

Out[12]=




In[13]:= 
```
Plot[{Sinh[x], ArcSinh[x]}, {x, -5, 5}, PlotRange → {-5, 5}]
```

Out[13]=



# Die Regel von L'Hospital.

**Satz (Cauchy)** Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $(a,b)$ diff-bar.
Dann gibt es mindestens ein punkt $\xi \in (a,b)$ mit

$$g'(\xi)(f(b)-f(a)) = f'(\xi)(g(b)-g(a)).$$

Falls $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ folgt $g(a) \neq g(b)$ und

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

**Bmk.**

Falls $g(x) = x$
$\Rightarrow$ Cauchy Satz gibt Mittelwertsatz.

$$\underbrace{g'(\xi)}_{1}(f(b)-f(a)) = f'(\xi)(\underbrace{g(b)}_{b} - \underbrace{g(a)}_{a}).$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

**Beweis** Wende den Satz von Rolle auf

$$F(x) := f(x)[g(b)-g(a)] - g(x)[f(b)-f(a)].$$

**Satz** (L'Hospital)
(Bernoulli)

Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diff.bar mit

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Falls $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = 0 \quad (\pm\infty)$

und $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = 0 \quad (\pm\infty)$

und $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$

existiert, Dann folgt das

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

**Bmk.** ~~Satz~~ Der Satz gilt auch

- Falls $b = \pm\infty$
- Falls $x \to a^+$
- Falls $\lim\limits_{x \to b^-} f = \infty$, $\lim\limits_{x \to b^-} g = \infty$.

**Bsp.** ① $\forall a > 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

d.h. $\boxed{\ln x \text{ wächst langsamer als jede Potenzen } x^a.}$

**Beweis**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \frac{\infty}{\infty}$$

$f(x) = \ln x$, $\quad g(x) = x^a$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g'(x) = a x^{a-1}$

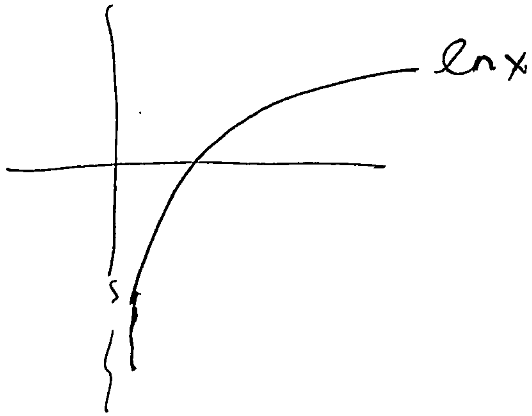
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{a x^{a-1}} = \frac{1}{a x^a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Mittels L'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln}{x^a} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a x^a} = 0.$$

(2) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x \sim 0\cdot(-\infty)$




$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \sim \frac{\infty}{\infty}$$

(Im Allg. Falls $f(x)g(x) \sim 0\cdot\infty$

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\left(1/f(x)\right)}$$ )

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1/x)}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$

Die ~~A~~nnahme $g'(x)\neq 0$ ist wichtig

**Bsp.** $f(x) = x + \sin x \cos x$

$g(x) = f(x)\cdot e^{\sin x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f}{g}$ existiert nicht.

aber $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'}{g'} = \frac{2\cos x}{2\cos x + x + \sin x\cos x}\cdot e^{-\sin x}$

$= 0.$

$\lim \frac{f}{g} \neq \lim \frac{f'}{g'}$

**Bsp.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

$g'(x) = 2x \qquad g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(0^+, c)$

$\Rightarrow f(x) = \cos x - 1 \qquad g(x) = x^2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f'}{g'} = \cancel{\sin x}\ \lim \frac{-\sin x}{2x}.$

$= -\frac{1}{2} \underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}}_{1} = -\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$

$\cos x = \cancel{\quad}$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \text{———}$$

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + - - -$$

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} + - - -$$

$$\downarrow x \to 0 \qquad\qquad \downarrow x \to 0$$

$$-\frac{1}{2}.$$

§ 4.3 Höhere Ableitungen

**Defn** ① Sei $f : I \to \mathbb{R}$

$f$ ist <u>konvex</u> (konkav) auf einem Interval $I$ falls für alle $x_0 < x_1$, $x_0, x_1 \in I$ und $\forall t \in [0,1]$

$$\boxed{f(tx_1 + (1-t)x_0) \le t f(x_1) + (1-t) f(x_0)}$$

$\ge$

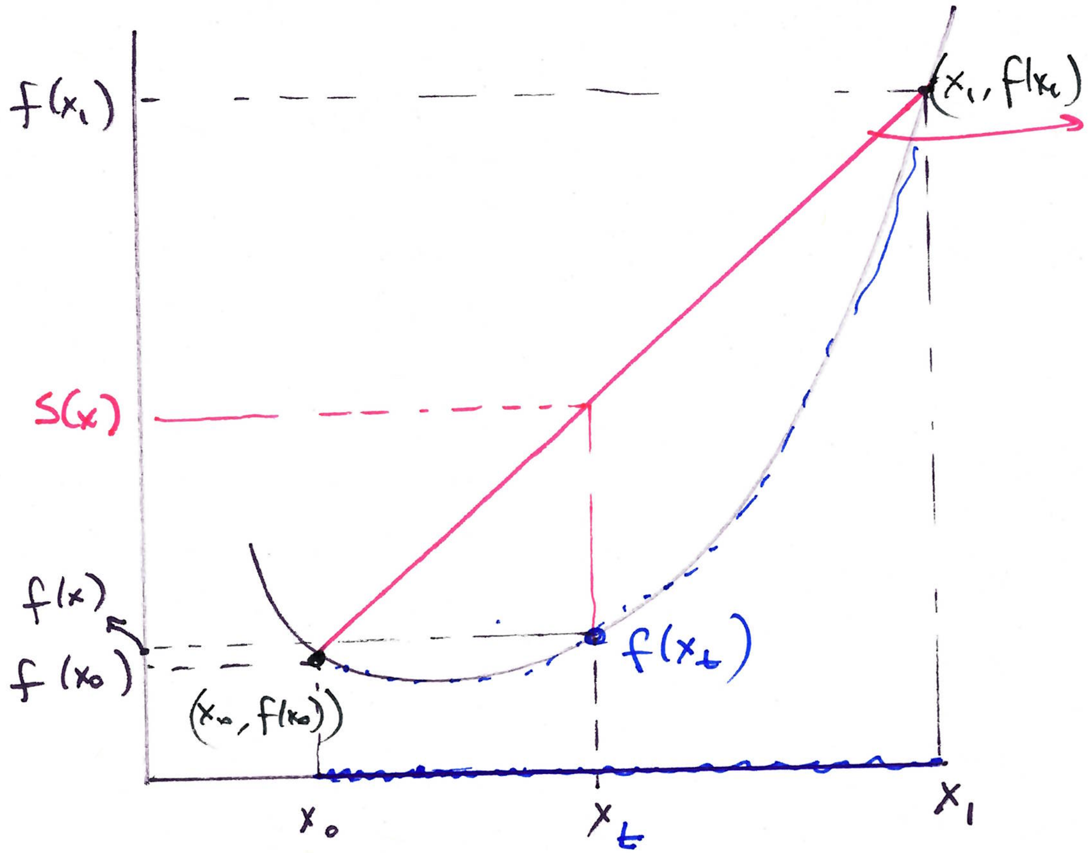
gilt.

② $f$ ist streng konvex (konkav) falls - - — — —

— — $f(tx_1 + (1-t)x_0) < t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$.

$\neq$

$\gtrneqq$




$$s(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$= f(x_0) - f(x_0)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) +$$

$$f(x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)$$

$$= (1-t) f(x_0) + t\, f(x_1)$$

$$t := \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Parametrisierung von der Segment zwischen $(x_0, 0)$ und $(x_1, 0)$ : $\boxed{t x_1 + (1-t) x_0 = x_t}$

$t = 0 \Rightarrow x_t = x_0$

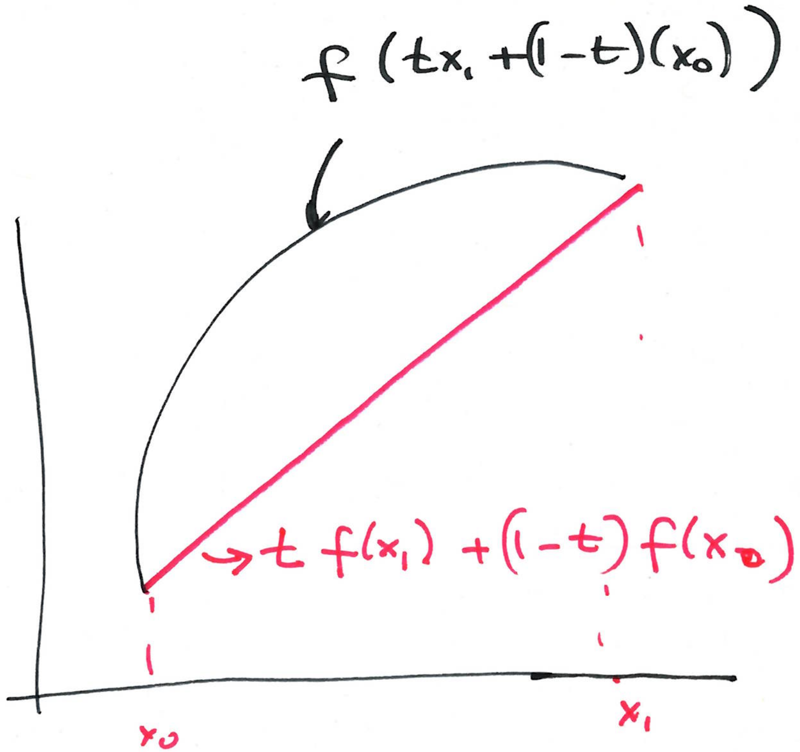
$t = 1 \Rightarrow x_t = x_1$

$f$ konvex : Für alle $x_0 < x_1$ und $t \in [0,1]$

$$\underbrace{f(t x_1 + (1-t) x_0)} \leq \underbrace{t f(x_1) + (1-t) f(x_0)}_{s(x)}$$

d.h. $f(x) \leq s(x)$

$\forall\ x = t x_1 + (1-t) x_0$




**Konkav.**

Bsp ① Funktionen der Form

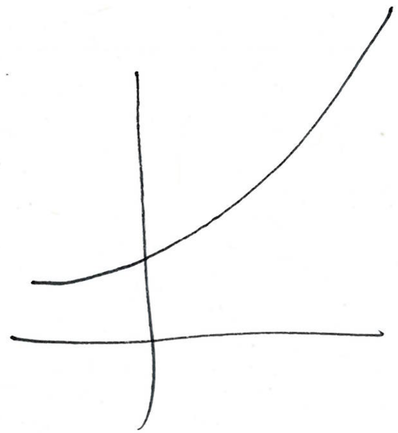
$x \longmapsto ax+b \quad a,b\in\mathbb{R}$

sind konvex und konkav

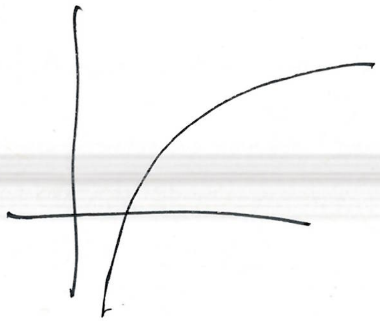
(aber nicht streng konvex oder konkav.

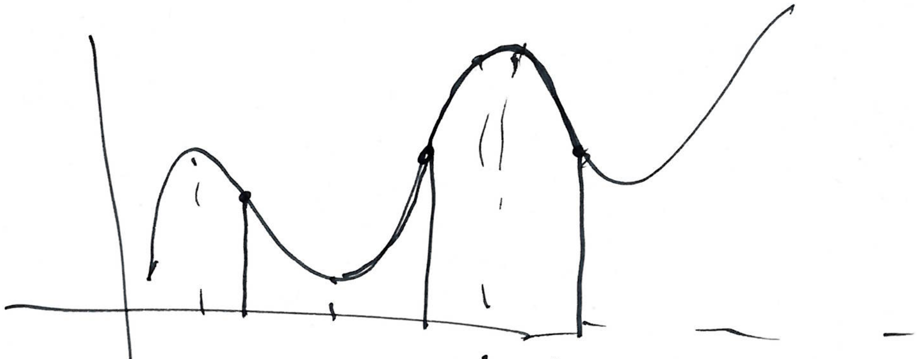
② $f(x)=x^2$ ist konvex

③ $f(x)=e^x$ ist konvex



④ $f(x)=\ln x$ ist konkav






**Bmk** ① Eine konvex Funktion auf einem offene Interval hat kein strenges lokales maximum).

② Die Summe zweier konvexer Funktionen ist konvex.

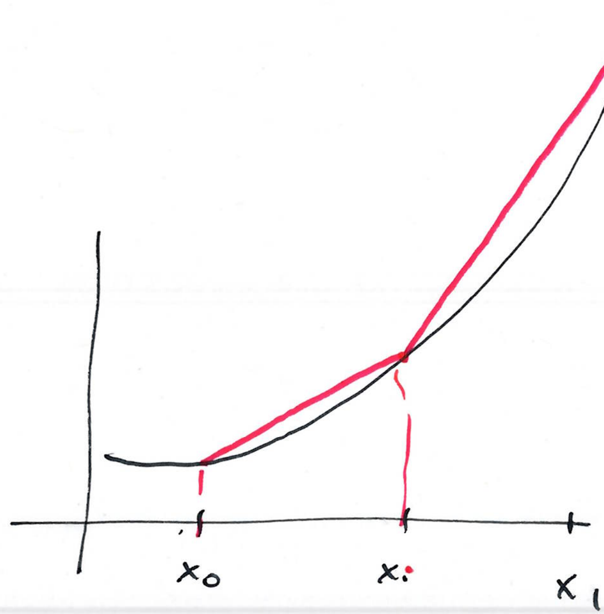
**Lemma** $f : I \to \mathbb{R}$

$f$ ist konvex

$\iff \forall\, x_0 < x < x_1$ in $I$

gilt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$



**Satz** Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ in $(a,b)$ diff.bar.

Die Funktion $f$ ist genau dann (streng) konvex falls $f'$ (streng) monotone wachsend ist.

$$f \text{ konvex} \Longleftrightarrow f' \nearrow$$

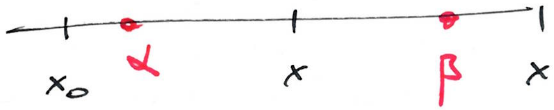
**Beweis** zz (a) $f' \nearrow \Longrightarrow f$ konvex.

Seien $x_0 < x < x_1 \in I$

Nach MWS $\exists\ \alpha \in (x_0, x)$ und $\beta \in (x, x_1)$ so dass

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boxed{f'(\alpha)}$$

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = f'(\beta)$$




$$\alpha < \beta \Longrightarrow f'(\alpha) < f'(\beta)$$

$\downarrow$

$f' \nearrow$

$$\Longrightarrow f'(\alpha) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < f'(\beta) = \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

$\Longrightarrow$ Lemma folgt dass $f$ ~~ist~~ konvex ist

(b) $f$ konvex $\Longrightarrow f' \nearrow$. Übung

Defn Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

falls $f$ in $(a,b)$ differenzierbar

und Ihre Ableitung

$f'$ in $(a,b)$ diff-bar ist

Dann bezeichnet $f''$

die Ableitung von Ableitung $f'$

$$f''=(f')'$$

$f''$ nennt sich die

zweite Ableitung von $f$.

Kor Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

2 mal diff-bar auf $(a,b)$.

Falls $f''\geq 0$ $(f''>0)$

dann ist $f$ konvex

(streng konvex).

$$\boxed{f''\geq 0 \Longrightarrow f \text{ konvex}}$$

$( f'\geq 0 \Longleftrightarrow f \nearrow$

**Bmk** ① $f$ konvex

$$\not\Rightarrow f'' \geq 0$$

Im allg. $f$ muss nicht 2-mall diff.bar sein.

Aber falls $f$ 2mall diff.bar ist, dann

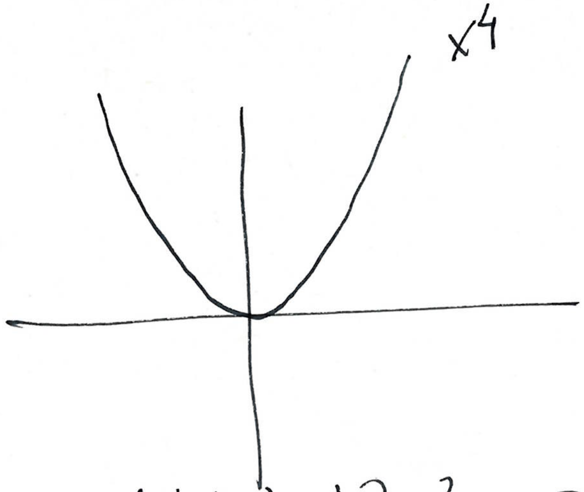
$$f \text{ konvex} \Rightarrow f'' \geq 0$$

② Aber $f$ streng konvex

$$\not\Rightarrow f'' > 0$$

**Bsp.** $f(x) = x^4$

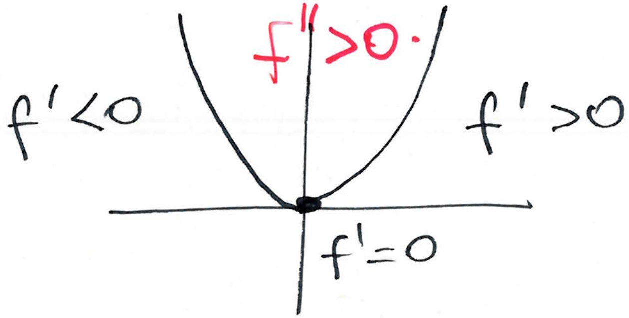
$f'(x) = 4x^3 \quad f''(x) = 12x^2$




$f''(x) = 12x^2 = 0$ in $x = 0$

**Bsp.** ① $f(x) = x^2$

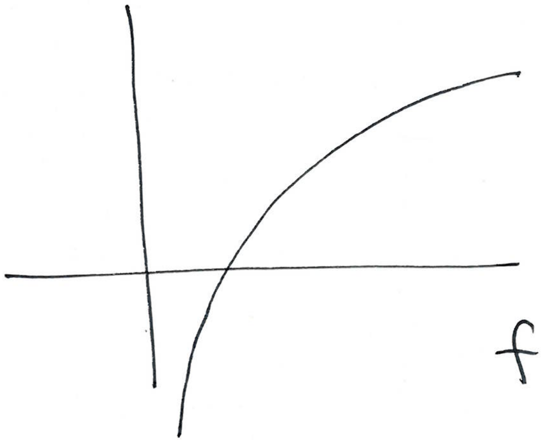
$f'(x) = 2x$




$f'' = 2 > 0 \Rightarrow f$ ist konvex

$f$ ist $\cup$

② $f(x) = \ln x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$



$f'' < 0$

$f' > 0 \Rightarrow f \nearrow$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

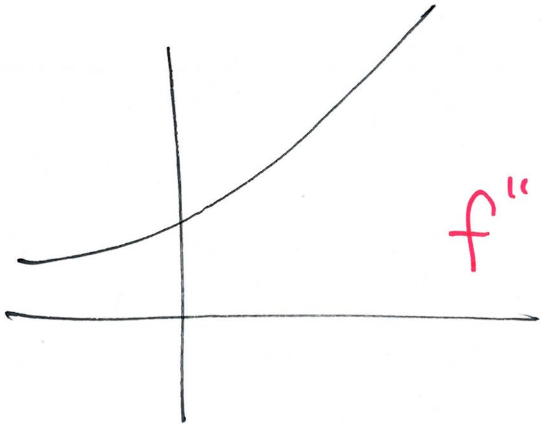
$\Rightarrow f$ konkav

$f \cap$

③ $e^x = f$

$f' = e^x > 0 \Rightarrow f \nearrow$

$f'' = e^x > 0 \Rightarrow f$ ist konvex



$f'' > 0$

**Defn.** Sei $f: D \to \mathbb{R}$ diff.bar in $D$ und $f'$ Ihre Ableitung

1) Für $n \geq 2$, ist $f$ n-mal diff.bar in $D$ falls $f^{(n-1)}$ in $D$ differenzierbar ist.

Dann ist $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die n-te Ableitung.

2) Die Funktion ist n-mal stetig differenzierbar in $D$ falls sie n-mal diff.bar ist und falls $f^{(n)}$ stetig ist.

3) Die Funk. $f$ ist in $D$ glatt (smooth) falls sie $\forall n \geq 1$ n-mal diff.bar ist

$$C^\infty(D) = \{f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist glatt}\}$$

$$C^n(D) = \{f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ n-mal stetig diff.bar}\}$$

**Satz** $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal diff.bar. Dann

1. $f^{(n)} + g^{(n)} = (f+g)^{(n)}$

2. $fg$ ist n-mal diff.bar.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

(3) Falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$

$\left(\frac{f}{g}\right)$ in $D$ $n$-mal diff bar.

<u>Satz</u> $f: D \to \mathbb{R}$ $g: E \to D$
$n$-mal diff bar. Dann
ist $g \circ f$ $n$-mal diff-bar.

## § 4.4. Potenzreihen und Taylor Approximation