

Eine Partition eines Intervalls

$I = [a, b]$ ist eine endliche

Teilmenge $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

• $\mathcal{P}(I) := \{P \subset I \mid P \text{ ist eine Partition von } I\}$

• die Feinheit der Partition

$$\delta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

• Die Riemannsche Summe der Partition P und zwischen Punkte

$$\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

ist

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \delta_i$$

• Sei f eine beschränkte Funktion

Die Untersumme $= \underline{S}(f, P)$

$$:= \sum_{i=1}^n \left(\inf_{x \in I_i} f(x) \right) \delta_i$$

$$I_i = [x_{i-1}, x_i] \quad \delta_i = x_i - x_{i-1}$$

Die Obersumme

$$\bar{S}(f, P) := \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x \in I_i} f(x) \right) \delta_i$$

• Für eine feste P gilt stets

$$\underline{S}(f, P) \leq S(f, P, \xi) \leq \bar{S}(f, P)$$

Defn. $\underline{S}(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{S}(f, P)$

Untere (Riemann) Integral von f

$$\underline{S}(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \bar{S}(f, P)$$

Obere (Riemann) Integral von f

• $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funk.

Dann ist f (Riemann) integrierbar

falls

$$\underline{S}(f) = \bar{S}(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Satz (Riemann Kriterium). Sei
 $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt
 f ist integrierbar $\Leftrightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}(I)$ mit
 $\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$

Bsp. $f(x) = x$ $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x$
 ist integrierbar. $\swarrow$ (Uniform Partition)

$$P_n = \left\{ a + i \frac{(b-a)}{n} \mid 0 \leq i \leq n \right\}$$

Dann

$$\underline{S}(f, P_n) = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

$$\bar{S}(f, P_n) = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

$$\bar{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = \frac{(b-a)^2}{n}$$

Für gegebene $\varepsilon > 0$, wähle n
 so dass $(b-a)^2/n < \varepsilon$.

Dann mittels Riemann Kriterium
 $f(x) = x$ ist integrierbar

Bsp. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann für jede $P \in \mathcal{P}([0, 1])$

$$\underline{S}(f, P) = 0, \quad \bar{S}(f, P) = 1$$

$\Rightarrow f$ ist NICHT integrierbar

Satz (Riemann Kriterium) sei

$f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

f ist integrierbar $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$
 so dass $\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I) = \{P \in \mathcal{P}(I) \mid \delta(P) < \delta\}$

$$\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $\forall P \in \mathcal{P}(I)$
 mit $\delta(P) < \delta$ und $\xi_1, \dots, \xi_n$ mit $\xi_i \in I_i$
 $|A - S(f, P, \xi)| < \varepsilon$ (wobei $A = \int_a^b f(x) dx$).

Bmk Falls $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

ist integrierbar und

$(P_n)_n \subset \mathcal{P}(I)$, $\xi_i^{(n)} \in I_i$
zwischen Punkten.

und $d(P_n) \rightarrow 0$ (als $n \rightarrow \infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n, \xi^{(n)}) \\ = \int_a^b f(x) dx.$$

Bsp. $f(x) = x$

$f(x)$ ist integrierbar.

$$\int_a^b f(x) dx = ? \quad \int_a^b x dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n, \xi^{(n)}).$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f, P_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

$$= (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Satz Sei $f = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
monoton~~e~~, beschränkt.

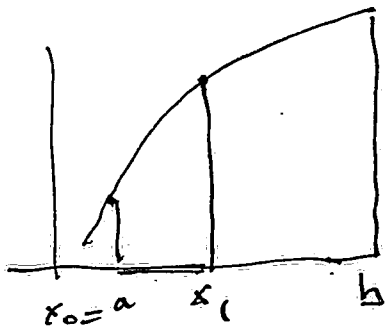
Dann ist f integrierbar

Beweis Sei $P_n \in \mathcal{P}(I)$
unif. Partition.

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i \quad i=0, \dots, n$$

$$\underline{S}(f, P_n) = \underline{S}(f, P_n)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \right) \left(\frac{b-a}{n} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \right) \left(\frac{b-a}{n} \right)$$



$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \left(\frac{b-a}{n} \right)$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \left(\frac{b-a}{n} \right)$$

$$= \left(\frac{b-a}{n} \right) \sum f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$\left(\frac{b-a}{n} \right) [f(x_n) - f(x_{n-1})$$

$$+ f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$f(x_1) - f(x_0)]$$

$$\left(\frac{b-a}{n} \right) [f(x_n) - f(x_0)] = \left(\frac{b-a}{n} \right) [f(b) - f(a)]$$

Falls n gross genug ist,
ist

$$\bar{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n)$$

$$< \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}$$

$$< \varepsilon.$$

§5.2 Integrierbare Funktionen

Satz Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$

Dann sind $f \pm g$, λg , fg

$|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$
integrierbar.

Und falls $|g(x)| \geq \beta > 0$
 $\forall (x \in [a, b])$ so ist
 f/g integrierbar.

Bsp. ① Da x , constant
sind integrierbar
 λx^n ist integrierbar
für alle n

$\Rightarrow a_n x^n + \dots + a_0$ ist
integrierbar.

Jede Poly. ist integrierbar.

$$2) P, Q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

2 Poly.

Falls Q in $[a, b]$ keine Nullstelle hat, dann ist

$\frac{P}{Q}$ integrierbar

$$\text{z.B. } I = [0, 1]$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ ist integrierbar}$$

Falls $f, g \in \mathcal{R}(I) = \text{Riemann integrierbare Funk. auf } I$

Dann sind $f+g, \lambda f$ integrierbar.

d.h. $\mathcal{R}(I)$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

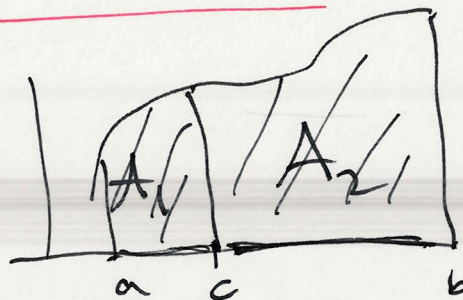
Satz Sei $f: [a, b]$ (beschränkt)
 $a < c < b$

Sei $f|_{[a, c]}$ und $f|_{[c, b]}$

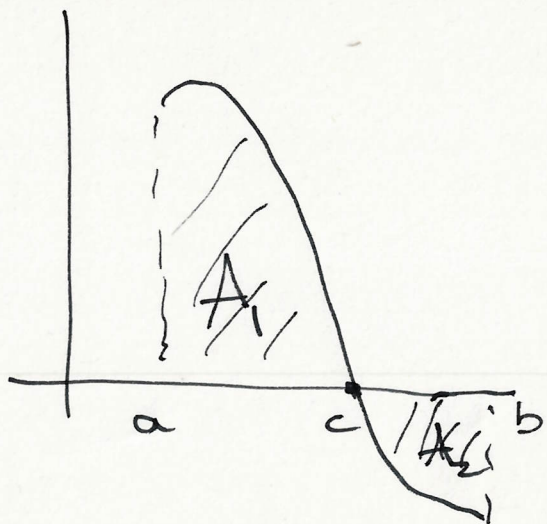
integrierbar. Dann ist f

in $[a, b]$ integrierbar und

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{\int_a^c f(x) dx}_{A_1} + \underbrace{\int_c^b f(x) dx}_{A_2}$$

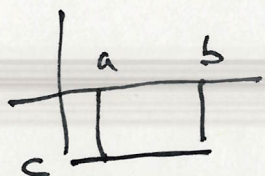


Bmk.



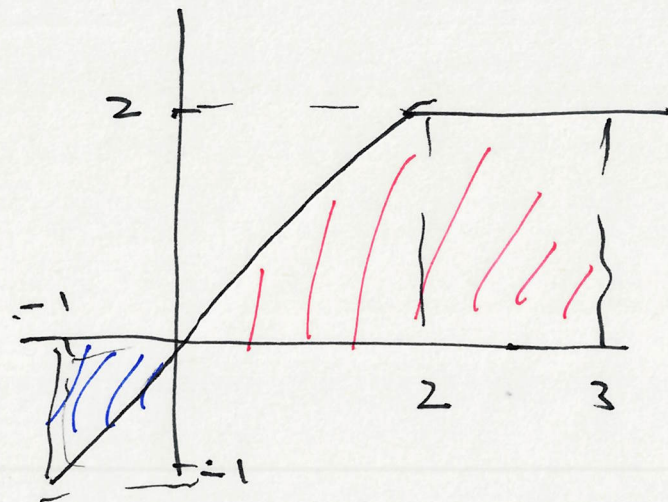
$$\int_a^c f(x) dx = A_1$$

$$\int_c^b f(x) dx = -A_2$$



$$\int_a^b c dx = \underbrace{c(b-a)}_{< 0}$$

(2)



$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [-1, 2] \\ 2 & x \in [2, 3] \end{cases}$$

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^2 x dx + \int_2^3 2 dx$$

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{2^2 - (-1)^2}{2} + 2 \cdot 1 = 7/2$$

Rote Striche ~ Blau A

Bmk. Wir erweitern
die definition von

$$\int_a^b f(x) dx \text{ auf}$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$\forall a, b, c.$

Satz Seien $I = [a, b]$

$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt
integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Dann

$$\begin{aligned} & \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx \\ &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

d.h. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{R}(I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

ist eine lineare Abbildung.

Satz $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

stetig. Dann ist f integrierbar

Bmk Der Beweis dieses Satzes

stützt sich auf eine
Eigenschaft der stetigen
Funktionen auf kompakten
Intervall, nämlich

gleichmässig Stetigkeit

Defn Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$D \subseteq \mathbb{R}$ ist in D

gleichmässig stetig falls.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \forall y \in D$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

zu erinnern.

f ist in D stetig falls

$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in D$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Satz Falls $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

stetig in $[a, b]$ dann ist

f in $[a, b]$ gleichmässig
stetig.

Bsp $\int_0^1 x^2 dx = ?$

f ist in $[a, b]$ integrierbar

$\Rightarrow$ für eine Folge

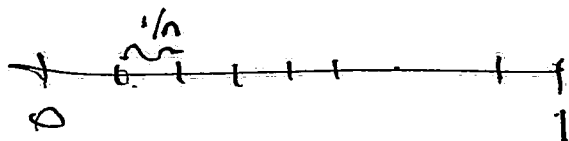
$P_n \in \mathcal{P}(I)$ von Partitionen
mit $\delta(P_n) \rightarrow 0$ und $\xi^{(n)}$

zwischen Punkten

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n, \xi^{(n)})$$

Sei $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$$x_k = \frac{k}{n}$$



$$\delta(P_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Als zwischen Punkten

$$\xi_k := \frac{k}{n} \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$$

$$S(f, P_n, \xi^{(n)})$$

$$= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^3} \left[\sum_{k=1}^n k^2 \right]$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

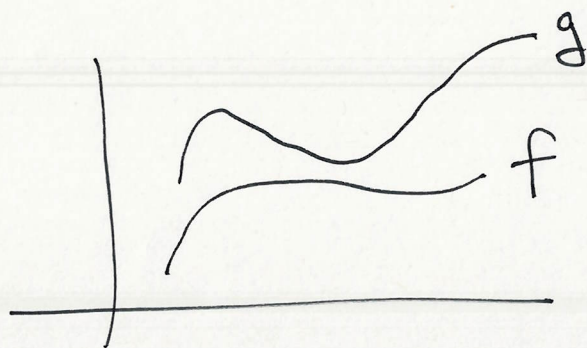
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n, \xi^{(n)})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$



§5-3 Ungleichungen und der Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz ① Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
beschränkt, integrierbar
und $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

Dann folgt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Beweis $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$

Falls $g \geq f \Rightarrow g - f \geq 0$

Dann für jede Partition
 P von $[a, b]$

$$\overline{S}(\cancel{g-f}, P) \geq \underline{S}(g-f, P) \geq 0$$

Kor Falls $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
integrierbar beschränkt ist,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Beweis $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$\Rightarrow$
Satz (*) $-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx$
 $\leq \int_a^b |f(x)| dx$

Satz Cauchy-Schwarz
Ungleichung.

f, g integ.

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}$$

Beweis Falls V Vektorraum
mit Skalar Product $\langle, \rangle$

Dann GS in V

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

$V = \mathcal{R}(I)$ integrierbare
Funktionen.

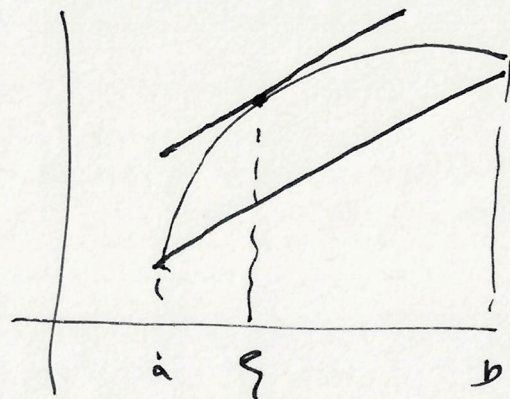
$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x) dx$$

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) dx$$

Satz (Mittelwertsatz der
Differentialrechnung)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
in (a, b) diff.-bar. Dann

$$\exists \xi \in (a, b) \text{ s.d.} \\ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$



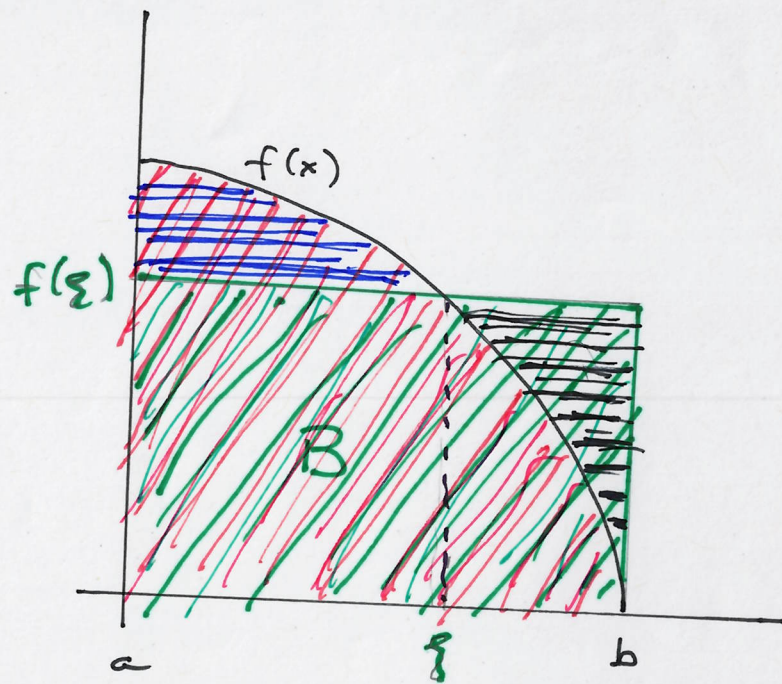
Satz MWS der Integralrechnung.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
(d.h. f ist integrierbar)

Dann gibt $\xi \in [a, b]$

mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$



$$B = f(\xi)(b-a) = \text{Flächeninhalt von grüne Rechteck.}$$

$A =$ Fläche zwischen $f(x)$, der $x=a$ Achse, $x=b$ Achse und der x -Achse von a bis b .

$$= \int_a^b f(x) dx$$

Mittelwertsatz der
Integral Rechnung
 $\exists \xi \in [a, b]$ so dass.

$$A = B$$

Fläche in B , die nicht unter
dem Graph erhalten ist

$$f(\xi)(b-\xi) - \int_{\xi}^b f(x) dx = \text{Schwarz}$$

schrattierte
Fläche

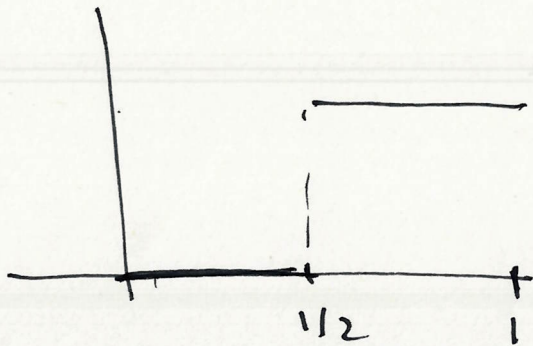
$$= \underbrace{\int_a^{\xi} f(x) dx - f(\xi)(\xi-a)}_{\text{Fläche unter dem Graph}} = \text{Blau}$$

Schrattierte
Fläche.

die nicht in B
enthalten ist

Bmk. Die Voraussetzung
in mWS (der Integralrechnung)
dass f stetig ist, ist wichtig!

Bsp. $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$



$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{1/2} 0 dx + \int_{1/2}^1 1 dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_b \stackrel{?}{=} \underbrace{f(\xi)(1)}_{b-a}$$

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{?}{=} f(\xi) \cdot \frac{1}{2}$$

Aber $f(x)$ ist entweder
0 oder 1

für jede $x \in [0, 1]$

Es gibt kein $\xi \in [0, 1]$

s.d. $f(\xi) = \frac{1}{2}$