

D-ITET / RW

Prüfung Analysis I & II

401-0231-10L & 401-0232-10L

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

XX-000-000

Prüfungs-Nr.

000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

1.MC1 [2 Punkte] Schreiben Sie die folgende Aussage als prädikatenlogischen Ausdruck:

“Es gibt keine grösste natürliche Zahl.”

- (A) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$, gilt $m \geq n$.
- (B) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}$, sodass $m > n$.
- (C) $\exists n \in \mathbb{N}$, sodass $\forall m \in \mathbb{N}$, gilt $m \leq n$.
- (D) $\exists n, m \in \mathbb{N}$ sodass $(n > m) \wedge (m > n)$.

1.MC2 [2 Punkte] Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

Welche der folgenden Aussagen über das Bild respektive Urbild von f ist **falsch**?

- (A) $f(\mathbb{R}) = f([0, \infty))$
- (B) $f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}([0, \infty))$
- (C) $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$
- (D) $f^{-1}(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$

1.MC3 [2 Punkte] Bestimmen Sie das Infimum der folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}$:

$$\left\{ \frac{1}{x} \mid x \in (0, \infty) \right\} \cap [-1, 1].$$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) -1
- (D) Die Teilmenge besitzt kein Infimum.

1.MC4 [1 Punkt] Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichung:

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

- (A) Die Gleichung hat keine Lösung in $\mathbb{C}$.
- (B) 0 und 2
- (C) i und $-i$
- (D) $1 + i$ und $1 - i$

1.MC5 [2 Punkte] Welche der folgenden Reihen konvergiert absolut?

(A)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

(B)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2}$$

(C)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2-2}$$

(D)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n^3}$$

1.MC6 [2 Punkte] Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \frac{x^n}{3^{n+3}}$$

(A) 0

(B) $\frac{1}{3}$

(C) 3

(D) ∞

1.MC7 [2 Punkte] Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine bestimmte Funktion. Welche der folgenden Aussagen impliziert **nicht** die Stetigkeit von f ?

(A) Es gilt $f(x) = g(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

(B) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

(C) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodass $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|y - x| < \delta$.

(D) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$.

1.MC8 [2 Punkte] Betrachten Sie die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{a \sin(x)} & \text{für } x \leq 0 \\ 2x + b & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ Parameter sind. Für welche Werte von a, b ist f von der Klasse C^1 ?

(A) $a = 2, b = 1$

- (B) $a = 2, b = 0$
- (C) $a = 1, b = 1$
- (D) $a = 1, b = 0$

1.MC9 [1 Punkt] Betrachten Sie die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^7 - x^4 + x.$$

Welches der folgenden Intervallen liegt im Bild von f ?

- (A) $[-1, 0]$
- (B) $[0, 1]$
- (C) $[1, 2]$
- (D) $[2, 4]$

1.MC10 [2 Punkte] Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + x - 1.$$

Es gilt:

- (A) f ist bijektiv.
- (B) f ist injektiv aber nicht surjektiv.
- (C) f ist surjektiv aber nicht injektiv.
- (D) f ist weder injektiv noch surjektiv.

1.MC11 [2 Punkte] Betrachten Sie die folgende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen:

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

Welche der folgenden Aussagen über den Grenzwert der f_n wenn $n \rightarrow \infty$ ist korrekt?

- (A) f_n konvergiert punktweise, aber nicht gleichmässig, auf $[0, 1]$ gegen die Funktion $f(x) = 0$.
- (B) f_n konvergiert gleichmässig auf $[0, 1]$ gegen die Funktion $f(x) = 0$.
- (C) f_n konvergiert punktweise, aber nicht gleichmässig, auf $[0, 1]$ gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

- (D) f_n konvergiert gleichmässig auf $[0, 1]$ gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

1.MC12 [2 Punkte] Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_1^2 \frac{\log(x)}{x} dx$$

- (A) 2
- (B) $\log(2)$
- (C) $2\log(2)$
- (D) $\frac{1}{2} \log(2)^2$

1.MC13 [1 Punkt] Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$f''(x) = x^3 f(x), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0,$$

für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

- (A) Dieses Problem besitzt keine Lösung.
- (B) Dieses Problem besitzt genau eine Lösung.
- (C) Die Menge der Lösungen dieses Problems ist ein zweidimensionaler Untervektorraum des Vektorraums der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
- (D) Dieses Problem besitzt mehr als eine Lösung, und die Menge der Lösungen ist **kein** zweidimensionaler Untervektorraum des Vektorraums der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

1.MC14 [1 Punkt] Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist kompakt?

- (A) $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
- (B) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$
- (C) $[0, 1] \cup \{2\}$
- (D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

1.MC15 [1 Punkt] Die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + x^3 > y + y^5\}$$

ist:

- (A) offen
- (B) abgeschlossen
- (C) beschränkt
- (D) weder offen, abgeschlossen noch beschränkt

1.MC16 [2 Punkte] Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1 x_2^2.$$

Die (totale) Ableitung von f im Punkt $p := (0, -1)$ angewendet auf den Vektor $v := (1, 1)$ ist gegeben durch:

- (A) $df(p)(v) = 1$
- (B) $df(p)(v) = -1$
- (C) $df(p)(v) = 3$
- (D) $df(p)(v) = -3$

1.MC17 [1 Punkt] Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(x) := \begin{pmatrix} e^{x_3 x_1^2} \\ e^{x_1 x_2^2} \\ e^{x_2 x_3^2} \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- (A) Das Vektorfeld besitzt ein Potential, das überall positiv ist.
- (B) Das Vektorfeld besitzt ein Potential, das überall negativ ist.
- (C) Das Vektorfeld besitzt kein Potential.
- (D) Keine der obigen Aussagen ist wahr.

1.MC18 [2 Punkte] Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1 \sin(x_2)$$

um den Punkt $(0, 0)$.

- (A) $T_{f,(0,0)}^2(x) = x_1 x_2$
- (B) $T_{f,(0,0)}^2(x) = 2x_1 x_2$
- (C) $T_{f,(0,0)}^2(x) = x_2 + x_1 x_2$
- (D) $T_{f,(0,0)}^2(x) = x_2 + 2x_1 x_2$

1.MC19 [2 Punkte] Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, in welchem gilt

$$df(x_0) = Df(x_0) = 0, \quad \text{Hess}_f(x_0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

- (A) x_0 ist eine lokale Maximalstelle für f .
- (B) x_0 ist eine lokale Minimalstelle für f .
- (C) x_0 ist ein Sattelpunkt.
- (D) Aus den gegebenen Daten folgt nicht, dass x_0 eine lokale Extremalstelle oder ein Sattelpunkt ist.

1.MC20 [2 Punkte] Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) := \begin{pmatrix} e^{2x_1} + x_2^3 \\ e^{4x_2} \end{pmatrix}.$$

Seien U und V offene Umgebungen von $(0, 0)$ und $(1, 1)$ in $\mathbb{R}^2$, sodass die Einschränkung $f : U \rightarrow V$ ein glatter Diffeomorphismus ist. Berechnen Sie $d(f^{-1})(1, 1)$.

- (A) $d(f^{-1})(1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
- (B) $d(f^{-1})(1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
- (C) $d(f^{-1})(1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
- (D) $d(f^{-1})(1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

1.MC21 [2 Punkte] Wir betrachten die Menge

$$S := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_1^3 = x_2 + x_2^4\}.$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

- (A) S ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ der Dimension 0.
- (B) S ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ der Dimension 1.
- (C) S ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ der Dimension 2.
- (D) S ist keine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

1.MC22 [2 Punkte] Wir betrachten die glatte Kurve in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + x + y^5 + y = 0\}.$$

Berechnen Sie den Tangentialraum an C im Punkt $(x, y) = (1, -1)$.

- (A) $T_{(1,1)}C = \{(5t, -6t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- (B) $T_{(1,1)}C = \{(5t, 6t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- (C) $T_{(1,1)}C = \{(6t, -5t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- (D) $T_{(1,1)}C = \{(6t, 5t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

1.MC23 [2 Punkte] Berechnen Sie das folgende wiederholte Integral:

$$I := \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \cos^2(e^{(x^2)} + y) dx \right) dy.$$

Hinweis: Eine Stammfunktion von $\cos^2$ ist gegeben durch $F(t) := \frac{\sin(t) \cos(t) + t}{2}$.

- (A) $I = 0$
- (B) $I = \pi$
- (C) $I = 2\pi$

(D) $I = 4\pi$

1.MC24 [1 Punkt] Wir betrachten die glatte Fläche (mit Rand)

$$\Sigma := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = e^{x_1^2 + x_2^2}, x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\},$$

das Vektorfeld

$$X \equiv e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

und die Koorientierung (= Einheitsnormalenvektorfeld) ν von Σ , die eine positive x_3 -Komponente hat. Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich dem Fluss von X durch Σ bezüglich ν ?

(A) $\int_{\overline{B_1(0)}} e_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \right) dy$

(B) $\int_{\overline{B_1(0)}} \|e_1\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \right\| dy$

(C) $\int_{\overline{B_1(0)}} e_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2y_1 e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_2 e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \right) dy$

(D) $\int_{\overline{B_1(0)}} \|e_1\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2y_1 e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_2 e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \right\| dy$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, oder argumentieren Sie weshalb diese nicht existieren. Begründen Sie kurz ihr Vorgehen z.B. durch Bezug auf Ergebnisse aus der Vorlesung.

2.A1 [2 Punkte]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 + x}$$

2.A2 [3 Punkte]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log(2n - 1) - \log(n + 1))$$

2.A3 [2 Punkte]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \sin\left(\frac{1}{n}\right) - n^2 \right)$$

2.A4 [3 Punkte]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^n \cos(k\pi)$$

Aufgabe 3

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} x^n \sin(x) \, dx.$$

3.A1 [2 Punkte] Berechnen Sie

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) \, dx$$

und

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(x) \, dx.$$

3.A2 [1 Punkt] Zeigen Sie, dass für alle geraden n gilt $I_n = 0$.

3.A3 [2 Punkte] Sei nun $n \geq 3$ ungerade. Zeigen Sie, dass gilt

$$I_n = 2\pi^n - n(n-1)I_{n-2}.$$

3.A4 [1 Punkt] Berechnen Sie

$$I_5 = \int_{-\pi}^{\pi} x^5 \sin(x) \, dx.$$

Aufgabe 4

4.A1 [2 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4.A2 [2 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f''(x) + f'(x) - 2f(x) = e^{2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4.A3 [2 Punkte] Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$f'' + f' - 2f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1.$$

Aufgabe 5

Wir definieren

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 - x + y^4 - y = 0\}$$

und

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x + y.$$

5.A1 [6 Punkte] Berechnen Sie das Maximum und das Minimum von f auf M .

Bemerkung: Falls Sie dazu einen Satz benutzen, überprüfen Sie dann die Voraussetzungen des Satzes. (Glattheit einer Funktion brauchen Sie nicht zu überprüfen.)

Aufgabe 6

Wir definieren

$$\Sigma := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2 \right)^2 + x_3^2 = 1 \right\}.$$

Das ist eine kompakte zweidimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$. (Sie brauchen das nicht zu beweisen.)

6.A1 [3 Punkte] Geben Sie zwei verschiedene Punkte an, die auf Σ liegen. Machen Sie eine Skizze von Σ und den zwei angegebenen Punkten.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie der Schnitt von Σ mit der $x_1 - x_3$ Ebene respektive der $x_1 - x_2$ Ebene aussieht.

6.A2 [3 Punkte] Berechnen Sie eine Koorientierung (= Einheitsnormalenvektorfeld) ν auf Σ .

Bemerkungen:

- Sie brauchen den berechneten Ausdruck für ν nicht zu vereinfachen.
- Sie brauchen nicht zu beweisen, dass das berechnete ν tatsächlich eine Koorientierung ist.

Von jetzt an bezeichnet ν die von Ihnen berechnete Koorientierung.

6.A3 [3 Punkte] Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss

$$\int_{\Sigma} X \cdot \nu \, dA.$$

Bemerkungen:

- Sie können diese Teilaufgabe selbst dann lösen, wenn Sie die obigen Teilaufgaben nicht lösen konnten.
- Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die von Σ eingeschlossene Menge ein C^1 -Gebiet ist.
- Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass der Rand eines Gebietes durch eine bestimmte Menge gegeben ist.