Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

1.MC1 [2 Punkte] Schreiben Sie die folgende Aussage als prädikatenlogischen Ausdruck:

"Es gibt keine grösste natürliche Zahl."

(A) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N},$ gilt $m \geq n$.
(B) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N},$ sodass $m > n$.
(C) $\exists n \in \mathbb{N},$ sodass $\forall m \in \mathbb{N},$ gilt $m \leq n$.
(D) $\exists n, m \in \mathbb{N}$ sodass $(n > m) \wedge (m > n)$.

Lösung:

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N},$ sodass $m > n$.

1.MC2 [2 Punkte] Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

Welche der folgenden Aussagen über das Bild respektive Urbild von f ist **falsch**?

(A) $f(\mathbb{R}) = f\Big([0,\infty)\Big)$
(B) $f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}\Big([0,\infty)\Big)$
(C) $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$
(D) $f^{-1}(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$

Lösung:

$f^{-1}(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$

1.MC3 [2 Punkte] Bestimmen Sie das Infimum der folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}$:

$$\left\{ \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in (0,\infty) \right\} \bigcap [-1, 1].$$

(A) 0
(B) 1
(C) -1
(D) Die Teilmenge besitzt kein Infimum.

Lösung:

0

1.MC4 [1 Punkt] Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichung:

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

(A) Die Gleichung hat keine Lösung in $\mathbb{C}$.
(B) 0 und 2
(C) i und $-i$
(D) $1 + i$ und $1 - i$

Lösung:

$1 + i$ und $1 - i$

1.MC5 [2 Punkte] Welche der folgenden Reihen konvergiert absolut?

(A)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

(B)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2}$$

(C)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2 - 2}$$

(D)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n^3}$$

Lösung:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n^3}}$$

1.MC6 [2 Punkte] Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \frac{x^n}{3^{n+3}}$$

(A) 0

(B) $\frac{1}{3}$

(C) 3

(D) ∞

Lösung:

3

1.MC7 [2 Punkte] Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bestimmte Funktion. Welche der folgenden Aussagen impliziert **nicht** die Stetigkeit von f?

(A) Es gilt $f(x) = g(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

(B) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

(C) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodass $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|y - x| < \delta$.

(D) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$.

Lösung:

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

1.MC8 [2 Punkte] Betrachten Sie die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{a\sin(x)} & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 2x + b & \text{für} \quad x > 0, \end{cases}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ Parameter sind. Für welche Werte von a, b ist f von der Klasse C^1?

(A) $a = 2,\ b = 1$

(B) $a = 2,\ b = 0$

(C) $a = 1,\ b = 1$

(D) $a = 1,\ b = 0$

Lösung:

$a = 2,\ b = 1$

1.MC9 [1 Punkt] Betrachten Sie die Funktion

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^7 - x^4 + x.$$

Welches der folgenden Intervallen liegt im Bild von f?

(A) $[-1, 0]$
(B) $[0, 1]$
(C) $[1, 2]$
(D) $[2, 4]$

Lösung:

$[0, 1]$

1.MC10 [2 Punkte] Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + x - 1.$$

Es gilt:

(A) f ist bijektiv.
(B) f ist injektiv aber nicht surjektiv.
(C) f ist surjektiv aber nicht injektiv.
(D) f ist weder injektiv noch surjektiv.

Lösung:

f ist bijektiv.

1.MC11 [2 Punkte] Betrachten Sie die folgende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen:

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

Welche der folgenden Aussagen über den Grenzwert der f_n wenn $n \to \infty$ ist korrekt?

(A) f_n konvergiert punktweise, aber nicht gleichmässig, auf $[0, 1]$ gegen die Funktion $f(x) = 0$.
(B) f_n konvergiert gleichmässig auf $[0, 1]$ gegen die Funktion $f(x) = 0$.
(C) f_n konvergiert punktweise, aber nicht gleichmässig, auf $[0, 1]$ gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für} \quad x = 1 \end{cases}$$

(D) f_n konvergiert gleichmässig auf $[0, 1]$ gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für} \quad x = 1 \end{cases}$$

Lösung:

f_n konvergiert punktweise, aber nicht gleichmässig, auf $[0,1]$ gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in [0,1) \\ 1 & \text{für} \quad x = 1 \end{cases}$$

1.MC12 [2 Punkte] Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_1^2 \frac{\log(x)}{x}\, dx$$

(A) 2

(B) $\log(2)$

(C) $2\log(2)$

(D) $\frac{1}{2}\log(2)^2$

Lösung:

$\frac{1}{2}\log(2)^2$

1.MC13 [1 Punkt] Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$f''(x) = x^3 f(x), \qquad f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0,$$

für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(A) Dieses Problem besitzt keine Lösung.

(B) Dieses Problem besitzt genau eine Lösung.

(C) Die Menge der Lösungen dieses Problems ist ein zweidimensionaler Untervektorraum des Vektorraums der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(D) Dieses Problem besitzt mehr als eine Lösung, und die Menge der Lösungen ist **kein** zweidimensionaler Untervektorraum des Vektorraums der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Lösung:

Dieses Problem besitzt genau eine Lösung.

1.MC14 [1 Punkt] Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist kompakt?

(A) $\mathbb{N} = \left\{1, 2, \dots\right\}$

(B) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$

(C) $[0,1] \cup \{2\}$

(D) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq 1\right\}$

Lösung:

$[0,1] \cup \{2\}$

1.MC15 [1 Punkt] Die Menge

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + x^3 > y + y^5\right\}$$

ist:

(A) offen

(B) abgeschlossen

(C) beschränkt

(D) weder offen, abgeschlossen noch beschränkt

Lösung:

offen

1.MC16 [2 Punkte] Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x_1 x_2^2.$$

Die (totale) Ableitung von f im Punkt $p := (0,-1)$ angewendet auf den Vektor $v := (1,1)$ ist gegeben durch:

(A) $df(p)(v) = 1$

(B) $df(p)(v) = -1$

(C) $df(p)(v) = 3$

(D) $df(p)(v) = -3$

Lösung:

$df(p)(v) = 1$

1.MC17 [1 Punkt] Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} e^{x_3 x_1^2} \\ e^{x_1 x_2^2} \\ e^{x_2 x_3^2} \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(A) Das Vektorfeld besitzt ein Potential, das überall positiv ist.

(B) Das Vektorfeld besitzt ein Potential, das überall negativ ist.

(C) Das Vektorfeld besitzt kein Potential.

(D) Keine der obigen Aussagen ist wahr.

Lösung:

Das Vektorfeld besitzt kein Potential.

1.MC18 [2 Punkte] Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x_1 \sin(x_2)$$

um den Punkt $(0, 0)$.

(A) $T^2_{f,(0,0)}(x) = x_1 x_2$

(B) $T^2_{f,(0,0)}(x) = 2x_1 x_2$

(C) $T^2_{f,(0,0)}(x) = x_2 + x_1 x_2$

(D) $T^2_{f,(0,0)}(x) = x_2 + 2x_1 x_2$

Lösung:

$T^2_{f,(0,0)}(x) = x_1 x_2$

1.MC19 [2 Punkte] Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, in welchem gilt

$$df(x_0) = Df(x_0) = 0, \qquad \mathrm{Hess}_f(x_0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(A) x_0 ist eine lokale Maximalstelle für f.

(B) x_0 ist eine lokale Minimalstelle für f.

(C) x_0 ist ein Sattelpunkt.

(D) Aus den gegebenen Daten folgt nicht, dass x_0 eine lokale Extremalstelle oder ein Sattelpunkt ist.

Lösung:

x_0 ist eine lokale Minimalstelle für f.

1.MC20 [2 Punkte] Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x) := \begin{pmatrix} e^{2x_1} + x_2^3 \\ e^{4x_2} \end{pmatrix}.$$

Seien U und V offene Umgebungen von $(0,0)$ und $(1,1)$ in $\mathbb{R}^2$, sodass die Einschränkung $f : U \to V$ ein glatter Diffeomorphismus ist. Berechnen Sie $d\left(f^{-1}\right)(1,1)$.

(A) $d\left(f^{-1}\right)(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(B) $d\left(f^{-1}\right)(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(C) $d\left(f^{-1}\right)(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(D) $d\left(f^{-1}\right)(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Lösung:

$d\left(f^{-1}\right)(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

1.MC21 [2 Punkte] Wir betrachten die Menge

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 + x_1^3 = x_2 + x_2^4 \right\}.$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(A) S ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ der Dimension 0.
(B) S ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ der Dimension 1.
(C) S ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ der Dimension 2.
(D) S ist keine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

Lösung:

S ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ der Dimension 1.

1.MC22 [2 Punkte] Wir betrachten die glatte Kurve in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$C := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^4 + x + y^5 + y = 0\right\}.$$

Berechnen Sie den Tangentialraum an C im Punkt $(x,y) = (1,-1)$.

(A) $T_{(1,1)}C = \left\{(5t, -6t) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$

(B) $T_{(1,1)}C = \left\{(5t, 6t) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$

(C) $T_{(1,1)}C = \left\{(6t, -5t) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$

(D) $T_{(1,1)}C = \left\{(6t, 5t) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$

Lösung:

$T_{(1,1)}C = \left\{(6t, -5t) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$

1.MC23 [2 Punkte] Berechnen Sie das folgende wiederholte Integral:

$$I := \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \cos^2\left(e^{(x^2)} + y\right) dx \right) dy.$$

Hinweis: Eine Stammfunktion von $\cos^2$ ist gegeben durch $F(t) := \frac{\sin(t)\cos(t)+t}{2}$.

(A) $I = 0$

(B) $I = \pi$

(C) $I = 2\pi$

(D) $I = 4\pi$

Lösung:

$I = \pi$

1.MC24 [1 Punkt] Wir betrachten die glatte Fläche (mit Rand)

$$\Sigma := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = e^{x_1^2 + x_2^2},\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\},$$

das Vektorfeld

$$X \equiv e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

und die Koorientierung (= Einheitsnormalenvektorfeld) ν von Σ, die eine positive x_3-Komponente hat. Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich dem Fluss von X durch Σ bezüglich ν?

(A) $\int_{\overline{B}_1(0)} e_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \right) dy$

(B) $\int_{\overline{B}_1(0)} \|e_1\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \right\| dy$

(C) $\int_{\overline{B}_1(0)} e_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2y_1 e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_2 e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \right) dy$

(D) $\int_{\overline{B}_1(0)} \|e_1\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2y_1 e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_2 e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \right\| dy$

Lösung:

$$\boxed{\int_{\overline{B}_1(0)} e_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2y_1 e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_2 e^{\|y\|^2} \end{pmatrix} \right) dy}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, oder argumentieren Sie weshalb diese nicht existieren. Begründen Sie kurz ihr Vorgehen z.B. durch Bezug auf Ergebnisse aus der Vorlesung.

2.A1 [2 Punkte]

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 + x}$$

Lösung:

Wir verwenden den Satz von Bernoulli-de l'Hospital. Man bemerke, dass $f(x) = e^x - e^{-x}$ und $g(x) = x^2 + x$ stetig und differenzierbar sind auf $\mathbb{R}$ und $f(0) = g(0) = 0$. Des Weiteren ist $g'(x) = 2x + 1 \neq 0$ für alle $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Somit gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 + x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}{\frac{d}{dx}(x^2 + x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2x + 1} = \frac{\lim_{x\to 0}(e^x + e^{-x})}{\lim_{x\to 0}(2x + 1)} = 2.$$

2.A2 [3 Punkte]

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\log(2n-1) - \log(n+1) \Big)$$

Lösung:

Wir verwenden die Rechenregeln für den Logarithmus. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\log(2n-1) - \log(n+1) = \log\left(\frac{2n-1}{n+1}\right).$$

Die Folge $\frac{2n-1}{n+1}$ konvergiert gegen 2 wenn $n \to \infty$. Da $\log(x)$ an der Stelle $x = 2$ stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\log(2n-1) - \log(n+1) \Big) = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{2n-1}{n+1}\right) = \log\left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1}\right) = \log(2).$$

2.A3 [2 Punkte]

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^3 \sin\left(\frac{1}{n}\right) - n^2 \right)$$

Lösung:

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung von $\sin(x)$ an der Stelle $x = 0$ lautet $x - \frac{1}{6}x^3$. Dank der Taylorformel gilt also $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + r(x)$ mit einem Restterm welcher $|r(x)| \leq Cx^4$

erfüllt für alle $|x| \leq 1$ und irgend eine Konstante $C > 0$. Somit gilt

$$n^3 \sin\left(\frac{1}{n}\right) - n^2 = n^3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + r\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n^2 = -\frac{1}{6} + n^3 r\left(\frac{1}{n}\right).$$

Aus der Diskussion oben folgt $|n^3 r(\frac{1}{n})| \leq \frac{C}{n}$ und somit $\lim_{n\to\infty} r(\frac{1}{n}) = 0$. Wir finden also

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3 \sin\left(\frac{1}{n}\right) - n^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{6} + n^3 r\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{6}$$

2.A4 [3 Punkte]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} \cos(k\pi)$$

Lösung:

Man bemerke, dass $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Wir finden also

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\pi) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dividieren wir nun durch $\sqrt{n}$, so finden wir

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} \cos(k\pi) = 0.$$

Aufgabe 3

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} x^n \sin(x)\,dx.$$

3.A1 [2 Punkte] Berechnen Sie

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x)\,dx$$

und

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(x)\,dx.$$

Lösung:

Wir verwenden partielle Integration. Es gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x)\,dx = -x\cos(x)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,dx = -\pi\cos(\pi) - \pi\cos(-\pi) + 0 = 2\pi.$$

Beim zweiten Integral kann man mit der Antisymmetrie unter $x \to -x$ argumentieren, dass es verschwindet, oder zweimal partiell integrieren:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(x)\,dx &= -x^2\cos(x)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\,dx \\ &= -\pi^2\cos(\pi) + (-\pi)^2\cos(-\pi) + x\sin(x)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx \\ &= -\pi^2\cos(\pi) + \pi^2\cos(-\pi) + 0 = 0.\end{aligned}$$

3.A2 [1 Punkt] Zeigen Sie, dass für alle geraden n gilt $I_n = 0$.

Lösung:

Wenn n gerade ist, dann ist die Funktion $x^n \sin(x)$ ungerade, also $(-x)^n \sin(-x) = -x^n \sin(x)$. Somit verschwindet das Integral über $[-\pi, \pi]$.

Dass dies für jede Funktion f mit $f(-x) = -f(x)$ gilt, lässt sich wie folgt nachrechnen:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx + \int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx &= \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(-x)\,dx \\ &= \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx - \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = 0,\end{aligned}$$

wobei die Substitution $x \to -x$ auf das zweite Integral angewendet wurde.

3.A3 [2 Punkte] Sei nun $n \geq 3$ ungerade. Zeigen Sie, dass gilt

$$I_n = 2\pi^n - n(n-1)I_{n-2}.$$

Lösung:

Wir wenden zweimal partielle Integration an:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\pi}^{\pi} x^n \sin(x)\, dx = -x^n \cos(x)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} x^{n-1} \cos(x)\, dx \\ &= -x^n \cos(x)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + nx^{n-1} \sin(x)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - n(n-1) \int_{-\pi}^{\pi} x^{n-2} \sin(x)\, dx \\ &= -\pi^n \cos(\pi) + (-\pi)^n \cos(-\pi) + 0 - n(n-1)I_{n-2} = 2\pi^n - n(n-1)I_{n-2}, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass gilt $\sin(\pi) = \sin(-\pi) = 0$, $\cos(\pi) = \cos(-\pi) = -1$ und $(-\pi)^n = -\pi^n$ da n ungerade.

3.A4 [1 Punkt] Berechnen Sie

$$I_5 = \int_{-\pi}^{\pi} x^5 \sin(x)\, dx.$$

Lösung:

Aus der ersten Teilaufgabe wissen wir, dass $I_1 = 2\pi$. Mit der Rekursionsformel aus der vorherigen Teilaufgabe finden wir

$$I_5 = 2\pi^5 - 20I_3 = 2\pi^5 - 20(2\pi^3 - 6I_1) = 2\pi^5 - 40\pi^3 + 240\pi.$$

Aufgabe 4

4.A1 [2 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösungen lassen sich also vom charakteristische Polynom ablesen. Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$. Somit sind zwei unabhängige Lösungen gegeben durch e^x und e^{-2x}. Die allgemeine Lösung lautet also

$$f(x) = Ae^x + Be^{-2x}$$

für zwei Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$.

4.A2 [2 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f''(x) + f'(x) - 2f(x) = e^{2x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung ist gegeben durch die Summe einer partikulären Lösung und der allgemeinen Lösung der dazugehörigen homogenen DGL, welche in der vorherigen Teilaufgabe gelöst wurde. Wir müssen also noch eine partikuläre Lösung finden. Dazu machen wir den Ansatz $f(x) = Ce^{2x}$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Eingesetzt in die DGL finden wir

$$4Ce^{2x} + 2Ce^{2x} - 2Ce^{2x} = 4Ce^{2x} \stackrel{!}{=} e^{2x}.$$

Dies wird erfüllt durch $C = \frac{1}{4}$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + Ae^x + Be^{-2x}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten.

4.A3 [2 Punkte] Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$f'' + f' - 2f = 0, \qquad f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1.$$

Lösung:

Die allgemeine Lösung der DGL wurde in der ersten Teilaufgabe gefunden. Anhand der Anfangsbedingungen können wir nun den Wert der Konstanten A, B bestimmen. Es gilt $f(x) = Ae^x + Be^{-2x}$ und $f'(x) = Ae^x - 2Be^{-2x}$, also

$$f(0) = A + B = 0, \quad f'(0) = A - 2B = 1.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $B = -A$. Aus der zweiten Gleichung folgt dann $3A = 1$, also $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$f(x) = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x}.$$

Aufgabe 5

Wir definieren

$$M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^4 - x + y^4 - y = 0\right\}$$

und

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x + y.$$

5.A1 [6 Punkte] Berechnen Sie das Maximum und das Minimum von f auf M.

Bemerkung: Falls Sie dazu einen Satz benutzen, überprüfen Sie dann die Voraussetzungen des Satzes. (Glattheit einer Funktion brauchen Sie nicht zu überprüfen.)

Lösung:

Hier führt die Lagrange-Multiplikatorenregel zum Ziel. Wir definieren die Funktionen

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) := x^4 - x + y^4 - y = 0, \quad \text{und} \quad F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) := x + y.$$

Dann gilt $M = g^{-1}(0)$ und $f = F|_M$. Man bemerke, dass g glatt ist. Eine weitere Voraussetzung für die Lagrange-Multiplikatorenregel ist, dass 0 ein regulärer Wert von g ist. Dies gilt es zu überprüfen. Die Ableitung von g im Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 1 & 4y^3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Ableitung ist surjektiv, ausser sie ist gleich 0, also ausser wenn gilt

$$(x,y) = (4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{1}{3}}).$$

Aber dann gilt

$$g(4^{-\frac{1}{3}}, 4^{-\frac{1}{3}}) = 2(4^{-\frac{4}{3}} - 4^{-\frac{1}{3}}) = 2 \cdot 4^{-\frac{1}{3}}(\tfrac{1}{4} - 1) \neq 0.$$

Daher ist 0 ein regulärer Wert von g und die Voraussetzungen der Lagrange-Multiplikatorenregel sind erfüllt.

Wir bezeichnen die Lagrangefunktion für F, g mit

$$L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad L(x,y,\lambda) := F(x,y) - \lambda g(x,y) = x + y - \lambda(x^4 - x + y^4 - y).$$

Gemäss der Lagrange-Multiplikatorenregel ist $(x,y) \in M$ ein kritischer Punkt von f auf M genau dann wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass (x,y,λ) ein kritischer Punkt von L auf $\mathbb{R}^3$ ist, also wenn gilt

$$DL(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda(1 - 4x^3) & 1 + \lambda(1 - 4y^3) & x - x^4 + y - y^4 \end{pmatrix} = 0$$

Wir erhalten also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1+\lambda(1-4x^3) &= 0 \\ 1+\lambda(1-4y^3) &= 0 \\ x-x^4+y-y^4 &= 0 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\lambda \neq 0$ gelten muss. Somit implizieren die ersten beiden Gleichungen, dass $x^3 = y^3$ und somit auch $x = y$ gilt. Eingesetzt in die letzte Gleichung erhalten wir $x = x^4$. Entweder ist also $x = 0$ oder $x^3 = 1$ und somit $x = 1$. Wir erhalten so die beiden kritischen Punkte

$$(x,y) = (0,0) \qquad \text{und} \qquad (x,y) = (1,1).$$

Eingesetzt in die Funktion f, finden wir

$$f(0,0) = 0+0 = 0, \quad f(1,1) = 1+1 = 2.$$

Somit gilt

$$\max_M f = f(1,1) = 2, \quad \min_M f = f(0,0) = 0.$$

Aufgabe 6

Wir definieren

$$\Sigma := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\right)^2 + x_3^2 = 1 \right\}.$$

Das ist eine kompakte zweidimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$. (Sie brauchen das nicht zu beweisen.)

6.A1 [3 Punkte] Geben Sie zwei verschiedene Punkte an, die auf Σ liegen. Machen Sie eine Skizze von Σ und den zwei angegebenen Punkten.

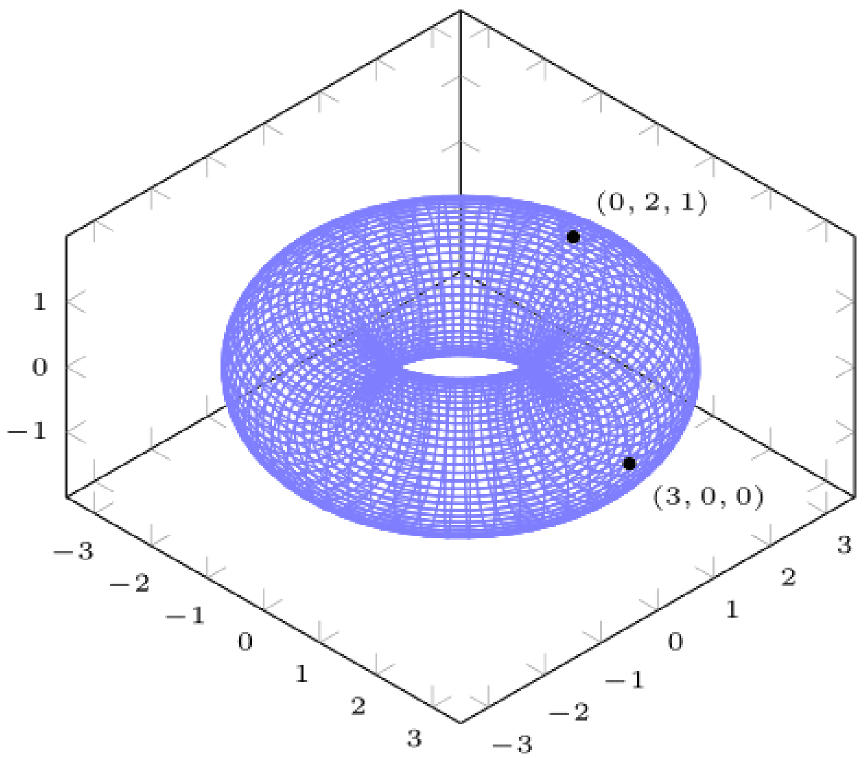
Hinweis: Überlegen Sie sich, wie der Schnitt von Σ mit der $x_1 - x_3$ Ebene respektive der $x_1 - x_2$ Ebene aussieht.

Lösung:

Beispiele von Punkten auf Σ:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 2 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich bei Σ um einen Torus. Hier ein Bild mit zwei Punkten eingezeichnet:



6.A2 [3 Punkte] Berechnen Sie eine Koorientierung (= Einheitsnormalenvektorfeld) ν auf Σ.

Bemerkungen:

- Sie brauchen den berechneten Ausdruck für ν nicht zu vereinfachen.
- Sie brauchen nicht zu beweisen, dass das berechnete ν tatsächlich eine Koorientierung ist.

Lösung:

Wir definieren

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\right)^2 + x_3^2.$$

Es gilt $\Sigma = g^{-1}(1)$, und 1 ist ein regulärer Wert von g. Sei nun $x \in \Sigma$. Gemäss einem Satz aus der Vorlesung ist der Tangentialraum $T_x\Sigma$ gegeben durch $\ker(Dg(x))$. Daher steht der Gradient $\nabla g(x)$ senkrecht auf $T_x\Sigma$. Wir berechnen:

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\right) \\ 2\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\right) \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $\nabla g : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ ist also ein Normalenvektorfeld zu Σ. Um eine Koorientierung zu erhalten, müssen wir noch normieren. Für alle $x \in \Sigma$ gilt

$$\|\nabla g(x)\|^2 = 4\left(\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\right)^2 + x_3^2\right) = 4,$$

also $\|\nabla g(x)\| = 2$ für $x \in \Sigma$. Wir erhalten also die Koorientierung $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\nu(x) := \frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\right) \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\right) \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) \\ x_2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man mit einer Parametrisation arbeiten. Die obere Hälfte des Torus, also $\Sigma \cap \{x_3 \geq 0\}$, lässt sich z.B. wie folgt parametrisieren:

$$\Phi : \overline{B}_3^2(0) \setminus B_1^2(0) \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1 - (\sqrt{u^2 + v^2} - 2)^2} \end{pmatrix}.$$

(Eine Parametrisation der unteren Hälfte erhält man durch ziehen der negativen Wurzel in der dritten Komponente.) Ein Einheitsnormalenvektorfeld zu $\Sigma \cap \{x_3 \geq 0\}$ ist nun gegeben durch

$$\frac{\partial_u\Phi \times \partial_v\Phi}{\|\partial_u\Phi \times \partial_v\Phi\|}.$$

Wir berechnen:

$$\partial_u \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -u \cdot f(u,v) \end{pmatrix}, \quad \partial_v \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -v \cdot f(u,v) \end{pmatrix},$$

wobei

$$f(u,v) = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \frac{\sqrt{u^2+v^2}-2}{\sqrt{1-(\sqrt{u^2+v^2}-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{u^2+v^2}-2)^2}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{u^2+v^2}}\right).$$

Somit gilt

$$\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi = \begin{pmatrix} u \cdot f(u,v) \\ v \cdot f(u,v) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \|\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi\| = \sqrt{1 + (u^2+v^2) f(u,v)^2},$$

also

$$\frac{\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi}{\|\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi\|} = \frac{1}{\sqrt{1+(u^2+v^2)f(u,v)^2}} \begin{pmatrix} u \cdot f(u,v) \\ v \cdot f(u,v) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies könnte man noch vereinfachen durch Einsetzen von $f(u,v)$:

$$\frac{\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi}{\|\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi\|} = \begin{pmatrix} u\left(1 - \frac{2}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) \\ v\left(1 - \frac{2}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) \\ \sqrt{1-(\sqrt{u^2+v^2}-2)^2} \end{pmatrix}.$$

Wir betonen nochmals, dass dies nur auf der oberen Hälfte des Torus eine Koorientierung gibt. Dank der Spiegelsymmetrie des Torus an der $x_1 - x_2$ Ebene kann man aber diese Koorientierung einfach fortsetzen auf die untere Hälfte indem man das Vektorfeld an der $x_1 - x_2$ Ebene spiegelt, also ein Minus-Zeichen vor die dritte Komponente setzt.

Von jetzt an bezeichnet ν die von Ihnen berechnete Koorientierung.

6.A3 [**3 Punkte**] Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss

$$\int_\Sigma X \cdot \nu \, dA.$$

Bemerkungen:

- Sie können diese Teilaufgabe selbst dann lösen, wenn Sie die obigen Teilaufgaben nicht lösen konnten.
- Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die von Σ eingeschlossene Menge ein C^1-Gebiet ist.

- Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass der Rand eines Gebietes durch eine bestimmte Menge gegeben ist.

Lösung:

Wir definieren die Menge

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2 \right)^2 + x_3^2 < 1 \right\}.$$

Das ist ein C^1-Gebiet mit Rand gegeben durch Σ. ν ist die nach aussen weisende Koorientierung des Randes von U. Gemäss dem Satz von Gauß gilt daher

$$\int_\Sigma X \cdot \nu \, dA = \int_{\partial U} X \cdot \nu \, dA = \int_U \nabla \cdot X \, dx,$$

wobei $\nabla \cdot X$ die Divergenz des Vektorfeldes X ist. Wir berechnen

$$\nabla \cdot X = \partial_1 x_1 + \partial_2 x_2 - 2\partial_3 x_3 = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Somit gilt

$$\int_\Sigma X \cdot \nu \, dA = 0.$$