Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0.1. Potenzreihe für den Arkustangens, Taylorreihe

(a) **(∗)** Sei $x \in]-1,1[$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{2j+1} x^{2j+1} \to \arctan x \qquad \text{für} \qquad m \to \infty.$$

Bemerkung: Es gilt also, dass

$$\arctan x = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{2j+1} x^{2j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} x^{2j+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \cdots \tag{1}$$

Hinweis: Gehen Sie wie in einem Beispiel in der Vorlesung vor (durch Potenzreihe definierte Funktion ist gliedweise integrierbar, Potenzreihe für Logarithmus). Verwenden sie dabei die Ableitung von arctan.

(b) **(∗)** Bestimmen Sie die Taylorreihe des Arkustangens um den Punkt $x_0 = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie (a) und ein Beispiel aus der Vorlesung (Taylorpolynom, Restglied, Taylorreihe).

Lösung.

(a) Gemäss einem Beispiel in der Vorlesung gilt

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{j=0}^{\infty} y^j, \qquad \forall y \in]-1,1[.$$

Indem wir diese Gleichheit mit $y := -x^2$ verwenden, erhalten wir

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j}, \qquad \forall x \in]-1,1[. \tag{2}$$

Gemäss einer Proposition in der Vorlesung gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mittels des zweiten Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung folgt daraus, dass

$$\arctan b - \arctan a = \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Sei $x \in]-1,1[$. Gemäss einem Korollar aus der Vorlesung (durch Potenzreihe definierte Funktion ist gliedweise integrierbar) gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{x^{2j+1}-0^{2j+1}}{2j+1} &\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^x \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j y^{2j}\,dy\\ &= \int_0^x \frac{1}{1+y^2}\,dy \qquad \text{(wegen (2))}\\ &= \arctan x - \arctan 0 \qquad \text{(gemäss (3))}\\ &= \arctan x.\end{aligned}$$

(b) Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$c_k := \begin{cases} \dfrac{(-1)^j}{2j+1}, & \text{falls } k = 2j+1 \text{ für ein } j \in \mathbb{N}_0,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases} \tag{4}$$

Gemäss (a), Gleichheit (1), ist arctan der punktweise Grenzwert der Potenzreihe $x \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Aus einem Beispiel in der Vorlesung folgt daher, dass $\left(x \mapsto \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Taylorreihe von arctan um den Punkt $x_0 = 0$ ist.

0.2. Grenzwert der "ungeraden" alternierenden harmonischen Reihe (Gregory-Leibniz-Reihe)

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j}{2j+1}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.

Bemerkung: Das ist die *Gregory-Leibniz-Reihe*. Diese Reihe ist eine ungerade Version der alternierenden harmonischen Reihe.

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung über alternierende Reihen.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der Gregory-Leibniz-Reihe, d. h. die unendliche Summe

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \cdots$$

Begründen Sie Ihre Rechnung.

Hinweise: Gehen Sie wie in einem Beispiel in der Vorlesung vor (Potenzreihe für Logarithmus, Grenzwert der alternierenden Reihe). Verwenden Sie dabei (1) und den folgenden Satz.

Grenzwertsatz von Abel: Seien $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $r \in]0,\infty[$. Falls die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n c_k r^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \to \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \qquad \text{für } x \nearrow r. \tag{5}$$

Lösung.

(a) Die Reihe konvergiert gemäss einem Satz aus der Vorlesung (Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen), da die Folge $\left(\frac{1}{2j+1}\right)_{j\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert.

(b) Wir definieren die Koeffizientenfolge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ wie in (4). Da gemäss (a) die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n c_k \cdot 1^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, folgt aus dem Grenzwertsatz von Abel mit $r = 1$, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \to \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot 1^k \qquad \text{für } x \nearrow 1. \tag{6}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \qquad \text{(wegen (4))}\\
&= \lim_{x\nearrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \qquad \text{(wegen (6))}\\
&= \lim_{x\nearrow 1} \arctan x \qquad \text{(gemäss Aufgabe 0.1(a))}\\
&= \arctan 1 \qquad \text{(da arctan im Punkt } x = 1 \text{ stetig ist)}\\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Die folgende Aufgabe haben wir in der Vorlesung verwendet, um die Gammafunktion zu definieren.

0.3. Jede wachsende Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenzfunktion

(a) **(∗)** Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nach oben unbeschränkte Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f bei ∞ *bestimmt gegen* ∞ *divergiert* g. d. w.

$$\forall y \in \mathbb{R} \exists x^* \in \mathbb{R} \forall x \in X : x \geq x^* \Rightarrow f(x) \geq y.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$f(x) \to \infty \qquad \text{für} \qquad x \to \infty.$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $c \in]0, \infty[$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$x^{-a} e^{cx} \to \infty \qquad \text{für} \qquad x \to \infty.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Definition der Exponentialfunktion mittels einer Potenzreihe. Betrachten Sie ein Glied in der Potenzreihe, das schneller wächst als die Potenzfunktion $x \mapsto x^a$.

Bemerkung: Das bedeutet, dass jede *wachsende* Exponentialfunktion $\exp(c\,\bullet)$, asymptotisch für grosse Argumente mehr wächst als jede Potenzfunktion $x \mapsto x^a$, auch wenn $c > 0$ noch so klein und a noch so gross sind.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ und $c > 0$ gilt, dass

$$x^a e^{-cx} \to 0 \qquad \text{für } x \to \infty. \tag{7}$$

Hinweis: Verwenden Sie (a).

Bemerkung: Wir haben (7) in der Vorlesung verwendet, um zu zeigen, dass die Funktion $t \mapsto t^a e^{ct}$ auf $]0, \infty[$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist, falls $a > -1$, $c < 0$. Für $x > 0$ ist das uneigentliche Riemann-Integral der Funktion $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ per definitionem $\Gamma(x)$, wobei Γ die Gammafunktion ist.

Lösung.

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Potenzfunktion

$$p_a :]0, \infty[, \qquad p_a(x) := x^a = e^{a \log x}.$$

Behauptung:

$$a > 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_a(x) \to \infty \qquad \text{für } x \to \infty \tag{8}$$

Beweis: Gemäss einem Beispiel in der Vorlesung ist der Logarithmus streng monoton wachsend. Da $a > 0$, gilt dasselbe für $a \log$. Gemäss einem Beispiel aus der Vorlesung ist exp streng monoton wachsend. Es folgt, dass p_a streng monoton wachsend ist. Das Bild dieser Funktion ist $]0, \infty[$. Es folgt, dass p_a bei ∞ bestimmt gegen ∞ divergiert. Das beweist die Behauptung.

Gemäss dem archimedischen Prinzip gibt es eine natürliche Zahl $n > a$. Für jedes $x \in]0, \infty[$ gilt, dass

$$\begin{aligned}
x^{-a}e^{cx} &= x^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(cx)^k}{k!} \\
&\geq x^{-a}\frac{(cx)^n}{n!} \qquad \text{(da } c > 0,\ x > 0) \\
&= \frac{c^n}{n!}x^{n-a} \\
&\to \infty \qquad \text{für } x \to \infty \qquad \text{(wegen (8), } n - a > 0 \text{ und } c > 0).
\end{aligned}$$

(b) Die Aussage folgt aus (a) und der folgenden Behauptung.

Behauptung: Seien $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nach oben unbeschränkte Teilmenge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die bei ∞ bestimmt gegen ∞ divergiert. Dann konvergiert $\frac{1}{f} : f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ bei ∞ gegen 0.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren $y := \varepsilon^{-1}$. Da f bei ∞ bestimmt gegen ∞ divergiert, gibt es ein $x^* \in \mathbb{R}$, sodass für jedes $x \in X$ gilt: Falls $x \geq x^*$, dann gilt $f(x) \geq y$. Wir wählen ein solches x^*. Sei $x \in X$, sodass $x \geq x^*$. Dann gilt $f(x) \geq y$ und daher $\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{y} = \varepsilon$. Da $f(x) \geq y > 0$, folgt, dass $\left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| \leq \varepsilon$. Es folgt, dass $\frac{1}{f}$ bei ∞ gegen 0 konvergiert.

0.4. uneigentliche Riemann-Integrale

(a) **(*)** Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto e^{cx}$ über $[0, \infty[$ uneigentlich (Riemann-)integrierbar? Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{cx}dx$, falls es existiert.

(b) Zeigen Sie, dass der Logarithmus über $]0, 1]$ uneigentlich integrierbar ist und berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^1 \log$.

Hinweise:

- Verwenden Sie eine Aufgabe aus Übungsserie 12 ((un-)bestimmte Integrale, partielle Integration), in der wir das unbestimmte Integral von log berechnet haben.

- Zeigen Sie, dass $x \log x \to 0$ für $x \searrow 0$. Verwenden Sie dazu Aufgabe 0.3(b) und den folgenden Hilfssatz:

  Hilfssatz (Substitution für Konvergenz): Seien $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ und $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Falls f an der Stelle x_0 gegen y_0 konvergiert[1] und g an der Stelle y_0 gegen z_0 konvergiert, dann konvergiert die verknüpte Funktion $g \circ f$ an der Stelle x_0 gegen z_0.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ über $\mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar ist und berechnen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

(d) Zeigen Sie, dass die Gaußfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-x^2}$, über $\mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar ist.

Hinweis: Finden Sie eine Funktion $g : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, die uneigentlich integrierbar ist, sodass $f \leq g$ auf $[1, \infty[$ und verwenden Sie den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz: Seien $a_- \in \mathbb{R}$, $a_+ \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f : [a_-, a_+[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die lokal Riemann-integrierbar ist, sodass es eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion $g : [a_-, a_+[\to \mathbb{R}$ gibt, sodass $|f| \leq g$. Dann ist f uneigentlich Riemann-integrierbar. Analoges gilt für eine Funktion $f :]a_-, a_+] \to \mathbb{R}$.

Beweis des Hilfssatzes:

Christian Blatter, *Analysis eins*, ETHZ, Studiengänge Mathematik und Physik, Wintersemester 2003/04, Version vom 1. Oktober 2003:

9.5 Uneigentliche Integrale, Konvergenzkriterien, (9.32), S. 374

(e) Ist der Sinus über $[0, \infty[$ uneigentlich Riemann-integrierbar? Warum?

Lösung.

(a) Sei $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion $\exp(c\,\bullet) : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ ist stetig und daher lokal Riemann-integrierbar. Für jedes $x_+ \in [0, \infty[$ gilt

$$\int_0^{x_+} e^{cx} dx = \begin{cases} \left.\dfrac{e^{cx}}{c}\right|_{x=0}^{x_+}, & \text{falls } c \neq 0, \\ x_+ - 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{9}$$

[1] Im Fall $y_0 = \pm\infty$ meinen wir damit, dass f an der Stelle x_0 bestimmt gegen y_0 divergiert. Wir nehmen hier nicht an, dass x_0 im Abschluss von X liegt. Falls das nicht der Fall ist, können wir Konvergenz immer noch wie bis anhin definieren. Der Grenzwert braucht dann allerdings nicht eindeutig zu sein.

Fall $c < 0$**:** Dann konvergiert $\frac{e^{cx}}{c}$ für $x \to \infty$ gegen 0. (Warum?) Mittels (9) folgt daraus, dass die Funktion $\exp(c\bullet)$ über $[0,\infty[$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist mit uneigentlichem Integral

$$\int_0^\infty e^{cx}dx = \lim_{x_+\to\infty}\int_0^{x_+} e^{cx}dx = \lim_{x_+\to\infty} \frac{e^{cx}}{c}\bigg|_{x=0}^{x_+} = 0 - \frac{e^{c\cdot 0}}{c} = -\frac{1}{c} > 0.$$

Fall $c \geq 0$**:** Aus (9) folgt, dass $\int_0^{x_+} e^{cx}dx$ für $x_+ \to \infty$ divergiert. Daher ist die Funktion $\exp(c\bullet)$ über $[0,\infty[$ *nicht* uneigentlich Riemann-integrierbar.

(b) Gemäss einer Aufgabe aus Übungsserie 12 ((un-)bestimmte Integrale, partielle Integration) gilt $\int \log = p_1 \cdot (\log -1) + \mathcal{C}$, wobei $p_1(x) := x$. Durch Einsetzen der Grenzen folgt, dass für jedes $x_- \in]0,1]$ gilt

$$\int_{x_-}^1 \log = 1\cdot(\log 1 - 1) - x_-(\log x_- - 1) = -1 + x_-(-\log x_- + 1). \quad (10)$$

Wir betrachten die Funktionen

$$f := -\log :]0,1] \to [0,\infty[, \qquad g : [0,\infty[\to \mathbb{R},\ g(y) := e^{-y}y.$$

Die Funktion f divergiert bei $x_0 := 0$ bestimmt gegen $y_0 := \infty$. Gemäss Aufgabe 0.3(b) konvergiert die Funktion g bei $y_0 = \infty$ gegen $z_0 := 0$. Gemäss dem Hilfssatz aus den Hinweisen (Substitution für Konvergenz) konvergiert $g \circ f$ daher bei $x_0 = 0$ gegen $z_0 = 0$, d. h.

$$x(-\log x) = g\circ f(x) \to 0 \qquad \text{für } x \searrow 0.$$

Mit Hilfe von (10) folgt daraus, dass

$$\int_{x_-}^1 \log \to -1 \qquad \text{für } x_- \searrow 0.$$

Daher ist log über $]0,1]$ uneigentlich Riemann-integrierbar mit

$$\int_0^1 \log = -1.$$

Bemerkung: Heuristisch folgt diese Gleichheit aus den folgenden Tatsachen:

- Die Fläche zwischen der Abszisse und dem Graphen der Funktion $\log :]0,1] \to \mathbb{R}$ ist die an der Diagonale [2] gespiegelte Fläche zwischen der Abszisse und dem Graphen der Funktion $\exp : [0,\infty[\to \mathbb{R}$. Das folgt daraus, dass log die Umkehrfunktion von exp ist. (Machen Sie eine Zeichnung, um sich von der Aussage über die Flächen zu überzeugen!)

[2] Damit meinen wir die Gerade $\{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, die durch die Gleichung $x = y$ bestimmt wird.

- $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$. Das folgt aus (a).

(c) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{1+x^2},$$

ist stetig und daher über $\mathbb{R}$ lokal Riemann-integrierbar. Sei $x_+ \in [0, \infty[$. Es gilt

$$\int_0^{x_+} f = \arctan x|_{x=0}^{x_+} = \arctan x_+ - 0 \to \frac{\pi}{2} \qquad \text{für } x_+ \to \infty.$$

(Warum gilt die Konvergenz?) Daher ist f über $[0, \infty[$ uneigentlich Riemann-integrierbar mit

$$\int_0^\infty f = \lim_{x_+ \to \infty} \int_0^{x_+} f = \frac{\pi}{2}.$$

Ein analoges Argument zeigt, dass f über $]-\infty, 0]$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_{-\infty}^0 f = \lim_{x_- \to -\infty} \int_{x_-}^0 f = \frac{\pi}{2}.$$

Es folgt, dass f über $\mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar mit

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty f = \int_0^\infty f + \int_{-\infty}^0 f = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

(d) Die Funktion f ist stetig und daher lokal Riemann-integrierbar. Wir definieren

$$g := \exp(-\,\bullet) : [1, \infty[\to \mathbb{R}.$$

Sei $x \in [1, \infty[$. Dann ist $x \leq x^2$, daher $-x \geq -x^2$ und deshalb $e^{-x} \geq e^{-x^2}$. Es gilt also $g \geq f = |f|$ auf $[1, \infty[$. Gemäss (a) ist die Funktion g uneigentlich Riemann-integrierbar. Mittels des Hilfssatzes aus dem Hinweis folgt daraus, dass $f|_{[1,\infty[}$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Ein analoges Argument zeigt, dass $f|_{]-\infty,-1]}$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Es folgt, dass f uneigentlich Riemann-integrierbar ist (über $\mathbb{R}$).

Bemerkungen:

- In Analysis 2 werden wir das Integral $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$ mit Hilfe des Integrals der zweidimensionalen Gaußfunktion berechnen.

- Dieses Integral spielt eine wichtige Rolle in der Statistik, da es gebraucht wird, um zu zeigen, dass das *Gaußsche Fehlerintegral* F normiert ist im Sinne, dass $F(x) \to 1$ für $x \to \infty$. Das Gaußsche Fehlerintegral ist definiert als die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

  Sie ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Sie spielt eine zentrale Rolle in der Statistik.

(e) Da $-\cos$ eine Stammfunktion von $\sin$ ist, gilt gemäss dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$\int_0^{x_+} \sin = -\cos|_0^{x_+} = -\cos x_+ + \cos 0, \qquad \forall x_+ \in [0, \infty[.$$

Die Funktion $-\cos$ konvergiert nicht bei ∞. (Warum?) Daraus folgt, dass $\sin$ *nicht* uneigentlich über $[0, \infty[$ Riemann-integrierbar ist.

0.5. GDG (gewöhnliche Differentialgleichung).

(a) Sei I ein Intervall und $\varphi : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die zu φ gehörige GDG ist gegeben durch

$$\varphi\Big(t, u(t), \dot{u}(t), \ldots, u^{(n)}(t)\Big) = 0, \qquad \forall t \in I. \tag{11}$$

Schreiben Sie diese GDG für die folgende Funktion aus:

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(t, x_0, x_1) := x_0 x_1 - e^t.$$

Führen Sie 1-4 für jede GDG (b)-(f) aus.

1. Geben Sie die Ordnung n der GDG an.
2. Finden Sie eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, sodass die GDG nach Verschieben von Termen [3] durch (11) gegeben ist.
3. Geben Sie an, ob die Gleichung linear ist.
4. Falls die Gleichung linear ist, geben Sie dann an, ob sie homogen oder inhomogen ist.

(b) **(∗)** $\dot{u}(t) = t^2$

[3] von der linken Seite auf die rechte Seite oder umgekehrt

(c) $\dot{u} - 2u = 0$

(d) **(∗)** $\dot{u} = u^2$

(e) **(∗)** $\ddot{u} - 5\dot{u} = -6u$

(f) $\dot{u}(t) - 2u(t) = e^{2t}$

Lösung.

(a) Die zu φ gehörige GDG ist gegeben durch

$$0 = \varphi\Big(t, u(t), \dot{u}(t)\Big) = u(t)\dot{u}(t) - e^t, \qquad \forall t \in I.$$

GDG	Ordnung	φ	linear?	homogen?
(b) $\dot{u}(t) = t^2$	1	$\varphi(t, x_0, x_1) := x_1 - t^2$	ja	nein
(c) $\dot{u} - 2u = 0$	1	$\varphi(t, x_0, x_1) := x_1 - 2x_0$	ja	ja
(d) $\dot{u} = u^2$	1	$\varphi(t, x_0, x_1) := x_1 - x_0^2$	nein	
(e) $\ddot{u} - 5\dot{u} = -6u$	2	$\varphi\Big(t, x_0, x_1, x_2\Big) := x_2 - 5x_1 + 6x_0$	ja	ja
(f) $\dot{u}(t) - 2u(t) = e^{2t}$	1	$\varphi(t, x_0, x_1) := x_1 - 2x_0 - e^{2t}$	ja	nein

Erklärungen zu dieser Tabelle: Wir wiederholen kurz die Definitionen. Die Ordnung einer GDG is gegeben durch die Ordnung der höchsten Ableitung der gesuchten Funktion, welche in der GDG vorkommt. In der GDG **(e)** $\ddot{u} - 5\dot{u} = -6u$ ist zum Beispiel die höchste Ableitung der gesuchten Funktion $\ddot{u}$, also hat die GDG Ordnung 2.

Eine GDG heisst *linear* g. d. w. nach Verschieben von Termen die linke Seite der GDG durch eine Linearkombination der gesuchten Funktion und ihrer Ableitungen gegeben ist und die rechte Seite durch eine feste Funktion. Das bedeutet, dass es Funktionen $a_i, f : I \to \mathbb{R}$ $(i = 0, \dots, n)$ gibt, sodass die GDG nach Verschieben von Termen gegeben ist durch

$$\sum_{i=0}^{n} a_i u^{(i)} = f, \qquad \text{d. h.} \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i(t) u^{(i)}(t) = f(t), \qquad \forall t \in I.$$

Dies ist zum Beispiel der Fall für die GDG $\dot{u} - 2u = 0$, aber nicht für die GDG $\dot{u} = u^2$. (In $\dot{u} = u^2$ tritt die gesuchte Funktion u quadratisch auf.)

Wir nennen eine lineare GDG homogen, falls die Inhomogenität f (konstant) gleich 0 ist. Dies ist zum Beispiel der Fall bei der GDG $\ddot{u} - 5\dot{u} = -6u$. Die GDG $\dot{u}(t) - 2u(t) = e^{2t}$ ist jedoch nicht homogen, da die Inhomogenität $e^{2\cdot}$ nicht (konstant) gleich 0 ist.

0.6. homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, Anfangswertproblem Führen Sie 1 und 2 für jede GDG (a)-(d) aus. In dieser Aufgabe ist die gesuchte Funktion u eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$.

Bemerkung: Die hier betrachteten GDG sind linear und homogen.

1. Wir schreiben n für die Ordnung der GDG. Finden Sie n linear unabhängige Lösungen der gegebenen GDG.

   Hinweis: Machen Sie den Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Überprüfen Sie, dass die gefundene Funktion u tatsächlich die GDG löst.

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge Z für die GDG.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Linearkombination der von Ihnen gefundenen Lösungen die GDG löst. Zeigen Sie auch, dass diese Linearkombinationen *alle* Lösungen der GDG sind. Verwenden Sie dazu einen Satz aus der Vorlesung (Lösungsraum einer homogenen linearen GDG, Superpositionsprinzip).

(a) **(∗)** $\dot{u} = 2u$

(b) **(∗)** $\ddot{u} = 4u$

(c) $\ddot{u} + u = 0$

(d) $\ddot{u} + 2\dot{u} + 2u = 0$

(e) Wir betrachten jetzt die Funktion

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad u(t) := t\Big(\zeta \circ \exp \circ \Gamma \circ \exp(t)\Big), \tag{12}$$

wobei Γ die Gammafunktion und ζ die Zetafunktion bezeichnen. Löst diese Funktion die GDG (a)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

Hinweise:

- Verwenden Sie (a)-(d).
- Sei $u_1, \dots, u_n$ eine Basis des Lösungsraums Z der GDG. [4] Machen Sie den Ansatz

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i, \qquad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

[4] Das bedeutet, dass $u_1, \dots, u_n$ linear unabhängig sind und Z aufspannen.

- Aus der Anfangsbedingung ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n$. Lösen Sie dieses Gleichungssystem. Setzen Sie die gefundenen Koeffizienten in (13) ein.

- Überprüfen Sie, dass die gefundene Funktion u tatsächlich das Anfangswertproblem löst.

(∗)(f) $$\begin{cases} \dot{u} &= 2u \\ u(0) &= 3 \end{cases}$$

(g) $$\begin{cases} \dot{u} &= 2u \\ u(1) &= 1 \end{cases}$$

(∗)(h) $$\begin{cases} \ddot{u} &= 4u \\ u(0) &= 2 \\ \dot{u}(0) &= 0 \end{cases}$$

(i) $$\begin{cases} \ddot{u} + u &= 0 \\ u(0) &= 1 \\ \dot{u}(0) &= 0 \end{cases}$$

(j) $$\begin{cases} \ddot{u} + 2\dot{u} + 2u &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ \dot{u}(0) &= 1 \end{cases}$$

Lösung.

(a) 1. Die Ordnung dieser GDG ist $n = 1$. Wir machen den Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$, d. h. wir nehmen an, dass u eine Lösung der GDG ist, sodass es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $u(t) = e^{\lambda t}$, für jedes $t \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen in die GDG erhalten wir

$$\lambda e^{\lambda t} = \dot{u}(t) = 2u(t) = 2e^{\lambda t}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Indem wir $t = 0$ einsetzen, erhalten wir

$$\lambda = \lambda e^{\lambda \cdot 0} = 2e^{\lambda \cdot 0} = 2.$$

Es folgt, dass $u(t) = e^{2t}$. Es gilt $\dot{u}(t) = 2e^{2t} = 2u(t)$, $\forall t$. Daher löst $u_1 := u$ tatsächlich die GDG $\dot{u} = 2u$.

Da $u_1 \neq 0$ (d. h., u_1 ist nicht konstant gleich 0), ist u_1 linear unabhängig.

2. Gemäss einem Satz aus der Vorlesung (Lösungsraum einer homogenen linearen GDG, Superpositionsprinzip) ist die Lösungsmenge Z der GDG $\dot{u} = 2u$ ein $(n = 1)$-dimensionaler komplexer Vektorraum. Da $u_1 \in Z$, folgt daraus, dass

$$Z \supseteq \operatorname{span}\{u_1\} = \left\{ c_1 u_1 \,\middle|\, c_1 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Die Notation span$S$ bezeichnet hierbei den (*Auf-*)*Spann* (= die *lineare Hülle*) einer Menge S. Da Z 1-dimensional ist und u_1 linear unabhängig ist, folgt, dass

$$Z = \operatorname{span}\{u_1\} = \left\{ c_1 e^{2\cdot} \,\middle|\, c_1 \in \mathbb{C} \right\}. \tag{14}$$

(b) 1. Die Ordnung dieser GDG ist $n = 2$. Wir machen den Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$. Durch Einsetzen in die GDG erhalten wir

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = \ddot{u}(t) = 4u(t) = 4e^{\lambda t}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Indem wir $t = 0$ einsetzen, erhalten wir

$$\lambda^2 = \lambda^2 e^{\lambda \cdot 0} = 4e^{\lambda \cdot 0} = 4.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$\lambda_1 := 2, \qquad \lambda_2 := -2.$$

Es folgt, dass

$$u = u_i := e^{\lambda_i \cdot} \qquad \text{für } i = 1 \text{ oder } 2.$$

Durch Einsetzen sehen wir, dass u_i für $i = 1, 2$ tatsächlich die GDG löst.

Behauptung: u_1, u_2 sind linear unabhängig.

Beweis: Seien $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, sodass

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 = 0.$$

Wir zeigen, dass $c_1, c_2 = 0$. Indem wir $t = 0$ und $t = 1$ einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= c_1 e^{2\cdot 0} + c_2 e^{-2\cdot 0} = 0, \\ c_1 e^2 + c_2 e^{-2} &= c_1 e^{2\cdot 1} + c_2 e^{-2\cdot 1} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Indem wir e^2 mal die erste Zeile von der zweiten abziehen, erhalten wir

$$c_2(-e^2 + e^{-2}) = 0, \qquad \text{also} \qquad c_2 = 0.$$

Mittels (15) folgt daraus, dass $c_1 = 0$. Das zeigt die Behauptung.

2. Gemäss einem Satz aus der Vorlesung (Lösungsraum einer homogenen linearen GDG, Superpositionsprinzip) ist die Lösungsmenge Z der GDG $\ddot{u} = 4u$ ein $(n = 2)$-dimensionaler komplexer Vektorraum. Da $u_1, u_2 \in Z$, folgt daraus, dass

$$Z \supseteq \operatorname{span}\{u_1, u_2\} = \left\{ c_1 u_1 + c_2 u_2 \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Da Z 2-dimensional ist und u_1, u_2 linear unabhängig sind, folgt, dass

$$Z = \operatorname{span}\{u_1, u_2\} = \left\{ c_1 e^{2\cdot} + c_2 e^{-2\cdot} \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

(c) 1. Die Ordnung dieser GDG ist $n = 2$. Wir machen den Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$. Durch Einsetzen in die GDG erhalten wir

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = \ddot{u}(t) + u(t) = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Indem wir $t = 0$ einsetzen, erhalten wir

$$\lambda^2 + 1 = \lambda^2 e^{\lambda \cdot 0} + 1 \cdot e^{\lambda \cdot 0} = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$\lambda_1 := i, \qquad \lambda_2 := -i.$$

Es folgt, dass

$$u = u_j := e^{\lambda_j \cdot} \qquad \text{für } j = 1 \text{ oder } 2. \tag{16}$$

Durch Einsetzen sehen wir, dass u_j für $j = 1, 2$ tatsächlich die GDG löst. Ein Argument wie in (b) zeigt, dass u_1, u_2 linear unabhängig sind.

2. Ein Argument wie in Teil (b) zeigt, dass

$$\begin{aligned} Z &= \operatorname{span}\{u_1, u_2\} \\ &= \left\{ c_1 e^{i\cdot} + c_2 e^{-i\cdot} \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Behauptung:

$$Z = \widetilde{Z} := \left\{ a \cos + b \sin \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C} \right\} \tag{18}$$

Bemerkung: Wir können den Lösungsraum Z der GDG also mit Hilfe von imaginären Exponentialfunktionen wie in (17) oder mit Hilfe von Kosinus und Sinus wie in (18) darstellen.

Beweis der Behauptung: "$\subseteq$": Gemäss der eulerschen Formel gilt

$$e^{i\bullet} = \cos + i\sin \in \widetilde{Z}, \qquad e^{-i\bullet} = \cos - i\sin \in \widetilde{Z}.$$

Da $\widetilde{Z}$ ein Vektorraum ist, folgt daraus mittels (17), dass $Z \subseteq \widetilde{Z}$.

"$\supseteq$": Es gilt

$$\begin{aligned}\cos &= \frac{e^{i\bullet} + e^{-i\bullet}}{2} \qquad \text{(gemäss der eulerschen Formel)}\\ &\in Z \qquad \text{(gemäss (17))},\\ \sin &= \frac{e^{i\bullet} - e^{-i\bullet}}{2i} \qquad \text{(gemäss der eulerschen Formel)}\\ &\in Z \qquad \text{(gemäss (17))}.\end{aligned}$$

Da Z ein Vektorraum ist, folgt daraus, dass $Z \supseteq \widetilde{Z}$.

Das beweist die Behauptung.

(d) 1. Ein Argument wie in (b),(c) führt auf die Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$\lambda_1 := -1 + i, \qquad \lambda_2 := -1 - i.$$

Es folgt, dass

$$u = u_j := e^{\lambda_j \bullet} \qquad \text{für } j = 1 \text{ oder } 2. \tag{19}$$

Durch Einsetzen sehen wir, dass u_j für $j = 1, 2$ tatsächlich die GDG löst. Ein Argument wie in (b),(c) zeigt, dass u_1, u_2 linear unabhängig sind.

2. Ein Argument wie in (c) zeigt, dass

$$\begin{aligned}Z &= \operatorname{span}\{u_1, u_2\}\\ &= \left\{ c_1 e^{(-1+i)\bullet} + c_2 e^{(-1-i)\bullet} \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\} \qquad (20)\\ &= \left\{ e^{-\bullet}\Big(a\cos + b\sin\Big) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C} \right\}. \qquad (21)\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Gleichheit $e^{(-1\pm i)t} = e^{-t}e^{\pm it}$ und ein Argument wie in (c) verwendet, das auf der eulerschen Formel beruht.

Bemerkung: Wir können den Lösungsraum Z der GDG also mit Hilfe von imaginären Exponentialfunktionen wie in (20) oder mit Hilfe einer reellen Exponentialfunktion und von Kosinus und Sinus wie in (21) darstellen.

(e) **Behauptung:** Nein, die Funktion u wie in (12) löst die GDG (a) nicht.

Beweis: Gemäss der Lösung zu (a) ist der Lösungsraum der GDG (a) durch (14) gegeben. Insbesondere ist jede Lösung der GDG ein Vielfaches von $e^{2\bullet}$.

Sei jetzt u wie in (12) definiert. Die Zeta-Funktion ist definiert durch

$$\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad \zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Es folgt, dass ζ positive Werte annimmt (auf $(1, \infty)$). Daraus folgt, dass

$$u(t) \neq 0, \qquad \forall t \neq 0.$$

Andererseits gilt $u(0) = 0 \cdot (\cdots) = 0$. Es folgt, dass u kein Vielfaches von $e^{2\bullet}$ ist. Daher ist u keine Lösung der GDG.

(f) Die GDG stimmt mit (a) überein. Wir definieren daher u_1 wie in (a), d. h.

$$u_1 := e^{2\bullet}.$$

Gemäss der Lösung zu (a) ist u_1 eine Basis des Lösungsraumes Z der GDG. Wir machen den Ansatz

$$u = c_1 u_1, \qquad c_1 \in \mathbb{C}.$$

Indem wir das in die Anfangsbedingung einsetzen, erhalten wir die lineare Gleichung

$$c_1 = c_1 e^{2\cdot 0} = u(0) = 3, \qquad \text{also} \qquad u = 3e^{2\bullet}.$$

Diese Funktion löst tatsächlich das Anfangswertproblem (f). (Überprüfen Sie das!)

(g) Die GDG stimmt mit (a) überein. Wir definieren daher u_1 wie in (a) und machen wie in **(f)** den Ansatz

$$u = c_1 u_1, \qquad c_1 \in \mathbb{C}.$$

Indem wir das in die Anfangsbedingung einsetzen, erhalten wir die lineare Gleichung

$$c_1 e^{2\cdot 1} = u(1) = 1, \qquad \text{also} \qquad c_1 = e^{-2} \qquad \text{und daher} \qquad u = e^{-2} e^{2\bullet}.$$

Diese Funktion löst tatsächlich das Anfangswertproblem (g). (Überprüfen Sie das!)

(h) Die GDG stimmt mit (b) überein. Wir definieren daher u_1, u_2 wie in (b), d. h.

$$u_1 := e^{2\bullet}, \qquad u_2 := e^{-2\bullet}.$$

Gemäss der Lösung zu (b) ist u_1, u_2 eine Basis des Lösungsraumes Z der GDG. Wir machen den Ansatz

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Indem wir das in die Anfangsbedingung einsetzen, erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= c_1 e^{2\cdot 0} + c_2 e^{-2\cdot 0} = u(0) = 2 \\ 2c_1 - 2c_2 &= c_1 \cdot 2e^{2\cdot 0} + c_2 \cdot (-2)e^{-2\cdot 0} = \dot{u}(0) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Indem wir zweimal die erste Zeile zur zweiten addieren, erhalten wir

$$4c_1 = 2 \cdot 2 + 0, \qquad \text{also} \qquad c_1 = 1.$$

Indem wir das in (22) einsetzen, erhalten wir $c_2 = 1$, also

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 = e^{2\bullet} + e^{-2\bullet}.$$

Diese Funktion löst tatsächlich das Anfangswertproblem (h). (Überprüfen Sie das!)

(i) Die GDG stimmt mit (c) überein. Wir definieren daher u_1, u_2 wie in (16), d. h.

$$u_1 := e^{i\bullet}, \qquad u_2 := e^{-i\bullet}.$$

Gemäss der Lösung zu (c) ist u_1, u_2 eine Basis des Lösungsraumes Z der GDG. Wir machen den Ansatz

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Indem wir das in die Anfangsbedingung einsetzen, erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= c_1 e^{i\cdot 0} + c_2 e^{-i\cdot 0} = u(0) = 1 \\ ic_1 - ic_2 &= c_1 i e^{i\cdot 0} + c_2(-i)e^{-i\cdot 0} = \dot{u}(0) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Indem wir i mal die erste Zeile zur zweiten addieren, erhalten wir

$$2ic_1 = i \cdot 1 + 0, \qquad \text{also} \qquad c_1 = \frac{1}{2}.$$

Indem wir das in (23) einsetzen, erhalten wir $c_2 = \frac{1}{2}$, also

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 = \frac{e^{i\bullet} + e^{-i\bullet}}{2} = \cos.$$

Diese Funktion löst tatsächlich das Anfangswertproblem (i). (Überprüfen Sie das!)

(j) Die GDG stimmt mit (d) überein. Wir definieren daher u_1, u_2 wie in (19), d. h.

$$u_1 := e^{(-1+i)\bullet}, \qquad u_2 := e^{(-1-i)\bullet}.$$

Gemäss der Lösung zu (d) ist u_1, u_2 eine Basis des Lösungsraumes Z der GDG. Wir machen den Ansatz

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Indem wir das in die Anfangsbedingung einsetzen, erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 = c_1 e^{(-1+i)\cdot 0} + c_2 e^{(-1-i)\cdot 0} &= u(0) = 0 \qquad (24) \\ (-1+i)c_1 + (-1-i)c_2 = c_1 \cdot (-1+i)e^{(-1+i)\cdot 0} + c_2 \cdot (-1-i)e^{(-1-i)\cdot 0} &= \dot{u}(0) = 1. \end{aligned}$$

Indem wir $(1+i)$ mal die erste Zeile zur zweiten addieren, erhalten wir

$$2ic_1 = (1+i)\cdot 0 + 1, \qquad \text{also} \qquad c_1 = -\frac{i}{2}.$$

Indem wir das in (24) einsetzen, erhalten wir $c_2 = \frac{i}{2}$, also

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 = e^{-\bullet}\frac{i}{2}\Big(-e^{i\bullet} + e^{-i\bullet}\Big) = e^{-\bullet}\sin.$$

Diese Funktion löst tatsächlich das Anfangswertproblem (j). (Überprüfen Sie das!)

Bemerkung: Die Lösung des Anfangswertproblems (j) ist also das Produkt einer Sinusschwingung und einer abklingenden Exponentialfunktion.

0.7. gedämpfter Federschwinger, elektrischer Schwingkreis

(a) Wir betrachten einen freien Federschwinger, der in einer zähen Flüssigkeit liegt und daher durch viskose Reibung gedämpft wird, wie in einem Beispiel in der Vorlesung. Wir nehmen dabei an, dass die Konstanten wie folgt gegeben sind:

$k :=$ Federkonstante $= 2\text{Nm}^{-1} = 2\text{kgs}^{-2}$

$c :=$ Dämpfungskonstante der Flüssigkeit $= 2\mathrm{Nm}^{-1}\mathrm{s} = 2\mathrm{kgs}^{-1}$

$m :=$ Masse des Körpers $= 1\mathrm{kg}$

Wir nehmen an, dass der Körper zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ nicht ausgelenkt ist und sich mit Geschwindigkeit $1\mathrm{m\,sec}^{-1}$ bewegt. Bestimmen Sie die Auslenkung x als eine Funktion der Zeit.

(b) **($*$)** Wir betrachten einen freien elektrischen Schwingkreis, der aus einem Widerstand, einem Kondensator und einer Spule besteht, die hintereinandergeschaltet sind, wobei die Enden miteinander verbunden sind, wie in einem Beispiel in der Vorlesung. Wir nehmen dabei an, dass die Konstanten wie folgt gegeben sind[5]:

$C :=$ Kapazität des Kondensators $= \frac{1}{2}\mathrm{F} = \frac{1}{2}\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^4\mathrm{A}^2$

$R :=$ elektrischer Widerstand des Widerstands (Bauelement) $= 2\Omega = 2\mathrm{kgm}^2\mathrm{s}^{-3}\mathrm{A}^{-2}$

$L :=$ Induktivität der Spule $= 1\mathrm{H} = 1\mathrm{kgm}^2\mathrm{s}^{-2}\mathrm{A}^{-2}$

Wir nehmen an, dass der Kondensator zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ungeladen ist und dass zu diesem Zeitpunkt ein Strom von 1A fliesst. Bestimmen Sie die Ladung Q als eine Funktion der Zeit.

Lösung.

(a) Gemäss einem Beispiel in der Vorlesung (gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung, freier gedämpfter Federschwinger) erfüllt die Auslenkung x die GDG

$$0 = \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x. \tag{25}$$

(Wir lassen im zweiten Schritt die Einheiten weg.) Gemäss Aufgabenstellung nehmen wir auch an, dass x die folgenden Anfangsbedingungen erfüllt:

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 1. \tag{26}$$

Gemäss Aufgabe 0.6(j) ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (25,26) gegeben durch

$$x = e^{-\cdot}\sin, \qquad \text{d. h.} \qquad x(t) = e^{-t}\sin t,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

[5]Wir verwenden hier die SI-Einheiten kg = Kilogramm, m = Meter, s = Sekunde, A = Ampère, F = Farad, Ω = Ohm, H = Henry, C = Coulomb.

Falls wir die Einheiten, die wir in (25) weggelassen haben, wieder einführen, dann erhalten wir

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\mathrm{s}}} \sin\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) \mathrm{m}.$$

Das ist die gesuchte Auslenkung des Körpers als eine Funktion der Zeit.

Bemerkung: Diese Auslenkung ist also das Produkt einer Sinusschwingung und einer abklingenden Exponentialfunktion. Das stimmt mit unserer Intuition überein, dass der Federschwinger eine Schwingung ausführt, die durch die viskose Reibung der Flüssigkeit gedämpft wird.

(b) Gemäss einem Beispiel in der Vorlesung (elektrischer Schwingkreis, freie und erzwungene gedämpfte Schwingung) erfüllt die Ladung Q des Kondensators die GDG

$$0 = \ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{CL}Q = \ddot{Q} + 2\dot{Q} + 2Q. \tag{27}$$

(Wir lassen hier im zweiten Schritt die Einheiten weg.) Gemäss Aufgabenstellung nehmen wir auch an, dass Q die folgenden Anfangsbedingungen erfüllt:

$$Q(0) = 0, \qquad \dot{Q}(0) = 1. \tag{28}$$

Gemäss Aufgabe 0.6(j) ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (27,28) gegeben durch

$$Q = e^{-\bullet} \sin, \qquad \text{d. h.} \qquad Q(t) = e^{-t} \sin t,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Falls wir die Einheiten, die wir in (27) weggelassen haben, wieder einführen, dann erhalten wir

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\mathrm{s}}} \sin\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) \mathrm{C}.$$

Das ist die gesuchte Ladung des Kondensators als eine Funktion der Zeit.

Bemerkung: Diese Ladung ist also das Produkt einer Sinusschwingung und einer abklingenden Exponentialfunktion. Das stimmt mit unserer Intuition überein, dass der elektrische Schwingkreis eine Schwingung ausführt, die durch den Widerstand gedämpft wird.

Die folgenden zwei Aufgaben sind Zusatzaufgaben, um den Begriff eines Vektorraumes zu repetieren. Dieser Begriff wurde in der Vorlesung *Lineare Algebra* behandelt. Er spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der Differentialgleichungen.

0.8. Vektorraum über $\mathbb{R}$

Überprüfen Sie, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ Vektorräume über $\mathbb{R}$ sind.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Definition eines Vektorraums:

Ein *Vektorraum über* $\mathbb{R}$ ist ein Tripel $\big(X, +, \cdot\big)$, wo X eine Menge ist, und

$$+ : X \times X \to X, \quad \cdot : \mathbb{R} \times X \to X$$

Abbildungen sind, sodass die folgenden Bedingungen gelten:

1. $(X, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Das heisst:
   a) $(X, +)$ ist assoziativ, also
   $$(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in X.$$
   b) Es existiert ein Element $0_X \in X$, sodass
   $$0_X + x = x + 0_X = x, \quad \forall x \in X.$$
   0_X wird Identitätselement der abelschen Gruppe $(X, +)$ genannt.
   c) Für alle $x \in X$ existiert ein $y \in X$, sodass
   $$x + y = 0_X.$$
   Das Element $y \in X$ wird das Inverse zu x genannt.
   d) $(X, +)$ ist abelsch (oder kommutativ), also
   $$x + y = y + x, \quad \forall x, y \in X.$$
2. Die Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist kompatibel mit der Skalarmultiplikation, das heisst
$$(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \, x \in X.$$
3. Die Skalarmultiplikation mit 1 ist trivial, das heisst
$$1 \cdot x = x, \quad \forall x \in X.$$

4. Distributivität gilt, das heisst

$$(a+b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x,$$
$$a\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y,$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$.

Lösung. Für $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ folgt dies aus den elementaren Eigenschaften der reellen Zahlen, siehe die Axiome im Kapitel 2.2 des Skripts von M. Struwe. Beachten Sie, dass das Identitätselement der abelschen Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ durch die Zahl 0 gegeben ist und die Inverse zu einem $x \in \mathbb{R}$ durch die Zahl $-x$ gegeben ist. Beachten Sie auch, dass die Kompatibilität der Multiplikation in $\mathbb{R}$ mit der Skalarmultiplikation, also die zweite Bedingung in der Definition eines Vektorraums, äquivalent ist zur Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{R}$.

Für $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ folgt dies, indem wir komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ schreiben als

$$z = x + iy$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$. Die Addition in $\mathbb{C}$ ist dann gegeben durch

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

und die Skalarmultiplikation mit einem $a \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$az = a(x + iy) = ax + iay.$$

Die gewünschten Eigenschaften für $\mathbb{C}$ folgen dann aus den entsprechenden Eigenschaften von $\mathbb{R}$. Beachten Sie, dass wieder das Identitätselement der abelschen Gruppen $(\mathbb{C}, +)$ durch die Zahl 0 gegeben ist und die Inverse zu einem $z = x + iy \in \mathbb{C}$ durch die Zahl $-z = -x - iy$ gegeben ist. Beachten Sie auch, dass $\mathbb{C}$ ein zwei-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. Eine Basis ist gegeben durch $\{1, i\}$.

In der Vorlesung wird die Tatsache behandelt, dass der Lösungsraum einer homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung ein Vektorraum ist. Der Grund dafür ist, dass dieser Raum ein linearer Unterraum des Vektorraums aller Funktionen ist. Dass die Funktionen einen Vektorraum formen, ist die Aussage der nächsten Aufgabe.

0.9. Vektorraum von Funktionen

Sei S eine Menge, und sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$V^S = \{f : S \to V \text{ ist eine Abbildung}\},$$

die Menge aller Funktionen von S nach V, zusammen mit der punktweise Addition and Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Mit punktweiser Addition and Skalarmultiplikation werden die folgenden Abbildungen gemeint:

$$\begin{aligned} + : V^S \times V^S \to V^S, &\quad (f+g)(s) := f(s) + g(s), \\ \cdot : \mathbb{R} \times V^S \to V^S, &\quad (a \cdot f)(s) := a \cdot (f(s)), \end{aligned}$$

wobei auf der rechten Seite der Gleichungen die Addition und Skalarmultiplikation im Vektorraum V verwendet wird.

Bemerkung: Falls Ihnen lieber ist, können Sie die Aufgabe nur für den Fall $V = \mathbb{R}$ lösen.

Bemerkung: Motivation für die Notation B^A: Angenommen A and B sind endliche Mengen. Wir schreiben $|A|$ für die Kardinalität (= Anzahl Elemente) von A. Dann gilt

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|},$$

also die Anzahl Funktionen von A nach B ist gleich der Anzahl Elemente von B hoch die Anzahl Elemente von A.

Lösung. Sei S eine Menge und V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} X &:= V^S, \\ + : X \times X \to X, &\quad (f+g)(s) := f(s) + g(s), \\ \cdot : \mathbb{R} \times X \to X, &\quad (a \cdot f)(s) := a \cdot (f(s)). \end{aligned}$$

(Hier verwenden wir auf der rechten Seite die Addition und Skalarmultiplikation im Vektorraum V.)

Zu überprüfen sind die Bedingungen (i-iv) von einem Vektorraum (siehe Hinweis bei Aufgabe 3 auf der Übungsserie). Bedingung (i), also dass $(X, +)$ eine abelsche Gruppe ist, folgt daraus, dass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Das Identitätselement in X ist die konstante Funktion $0_X(s) = 0_V$ für alle $s \in S$, wobei 0_V das Identitätselement in V ist. Die (additive) Inverse zu einem Element $f \in X$ ist die Funktion $-f$, definiert durch $(-f)(s) := -f(s)$, also zu jedem $s \in S$ wird die (additive) Inverse von $f(s)$ im Vektorraum V zugeordnet.

Auf ähnliche Weise folgen die Bedingungen (ii,iii,iv) für $(X, +, \cdot)$ aus den entsprechenden Bedingungen für den Vektorraum $(V, +, \cdot)$.