1.1. Inhomogene Differentialgleichungen, partikuläre Lösung, Superpositionsprinzip

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung:

$$2y'' + 3y' + 10y = 1. \tag{1}$$

Zuerst lösen wir die entsprechende homogene Differentialgleichung

$$2y_h'' + 3y_h' + 10y_h = 0.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\mathrm{chp}(\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda + 10$$

und besitzt die Nullstellen

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}\left(-3 + i\sqrt{71}\right) \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}\left(-3 - i\sqrt{71}\right),$$

wie aus der Mitternachtsformel ersichtlich ist. Mithilfe des Satzes zur Basis für den Lösungsraum erhalten wir als allgemeine homogene Lösung $y_h(x)$ (mit den Nullstellen des charakteristischen Polynoms von oben):

$$y_h(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Nun bestimmen wir eine partikuläre Lösung von (1). Dazu machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C,$$

wobei C eine Konstante ist. Durch Einsetzen von $y_p(x)$ in die Differentialgleichung (1) berechnen wir $C = \frac{1}{10}$ (man bemerke, dass $y_p' = 0$ und $y_p'' = 0$). Somit ist $y_p(x) = \frac{1}{10}$ eine Lösung von (1). Damit ist

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= C_1 \exp\left(\frac{1}{4}\left(-3 + i\sqrt{71}\right)x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1}{4}\left(-3 - i\sqrt{71}\right)x\right) + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung von

$$2y'' + 3y' + 10y = 1.$$

Bemerkung: Mit der Eulerschen Formel und einer Redefinition der Konstanten (und Beschränkung auf reelle Zahlen) können die komplexen Exponentialfunktion durch Sinus- und Kosinusfunktionen ersetzt werden, um eine reellwertige Lösung zu erhalten (Wie sieht diese aus?).

(b) Wir betrachten nun die DGL:

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) \tag{2}$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist dieselbe wie in der vorherigen Teilaufgabe:

$$y_h(x) = C_1 \exp\left(\frac{1}{4}\left(-3 + i\sqrt{71}\right)x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1}{4}\left(-3 - i\sqrt{71}\right)x\right) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Es bleibt also eine partikuläre Lösung für (2) zu bestimmen. Für (2) machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x),$$

wobei A, B Konstanten sind. Einsetzen von $y_p(x)$ in die Differentialgleichung (2) liefert

$$(2A - 6B)\sin(2x) + (2B + 6A)\cos(2x) = \sin(2x).$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2A - 6B &= 1 \\ 2B + 6A &= 0. \end{aligned}$$

Wir finden als Lösung

$$A = \frac{1}{20} \quad \text{und} \quad B = -\frac{3}{20}.$$

Also ist

$$y_p(x) = \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x)$$

eine partikuläre Lösung von (2). Somit ist die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= C_1 \exp\left(\frac{1}{4}\left(-3 + i\sqrt{71}\right)x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1}{4}\left(-3 - i\sqrt{71}\right)x\right) + \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x) \end{aligned}$$

Bemerkung: Sie erhalten das gleiche Resultat, wenn Sie einen allgemeineren Ansatz (siehe Bemerkung zur partikulären Lösung der inhomognenen GDG in den Notizen von Dr. Ziltener) mittels Exponentialfunktionen wählen.

(c) Nun bestimmen wir eine partikuläre Lösung der folgenden DGL:

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1. \tag{3}$$

Die zugehörige homogene DGL ist gleich wie in den vorherigen Teilaufgaben. Wir haben bereits partikuläre Lösungen $y_{p_1}(x)$ und $y_{p_2}(x)$ gefunden mit

$$2y''_{p_1} + 3y'_{p_1} + 10y_{p_1} = 1, \quad \text{und} \quad 2y''_{p_2} + 3y'_{p_2} + 10y_{p_2} = \sin(2x).$$

Da es sich hier um eine lineare Differentialgleichung handelt, können wir das Superpositionsprinzip anwenden, um zu schliessen, dass die Summe $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ eine partikuläre Lösung zur obigen DGL ist:

$$2y''_p + 3y'_p + 10y_p = \sin(2x) + 1.$$

Damit ist die allgemeine Lösung von

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1$$

gerade

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= e^{-\frac{3}{4}x}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right)\right) + \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x) + \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

1.2. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems für eine gewöhnliche Differentialgleichung

Das Anfangswertproblem besitzt eine Lösung, und die Lösung ist eindeutig. Dies ist die Aussage von Korollar 1.17 in den Notizen von Dr. Ziltener (siehe auch Satz 1.16). In der Notation von Korollar 1.17, lässt sich das Anfangswertproblem zweiten Grades schreiben als

$$\ddot{f}(t) - tf(t) = 0, \quad f(0) = 1, \quad \dot{f}(0) = 0,$$

und die Koeffizienten $a_0(t) = -t$, $a_1(t) = 0$ sind stetig, also ist Korollar 1.17 anwendbar.

1.3. Umwandeln von Differentialgleichungen höherer Ordnung in ein System von GDG erster Ordnung

(a) Wir schreiben:

$$f_1(x) := y(x), \quad f_2(x) := y'(x)$$

Dann sei

$$f(x) := \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichung lässt sich schreiben als

$$y'' = -y' + 2y, \quad \text{oder} \quad f_2' = -f_2 + 2f_1.$$

Zusätzlich gilt $f_1' = f_2$. Es gilt also:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2(x) \\ 2f_1(x) - f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} f(x).$$

Wenn y die Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllt, so erfüllt auch f die obige Differentialgleichung erster Ordnung. Umgekehrt wenn eine Lösung f zum obigen System gefunden wird, dann gilt:

$$f_1'(x) = f_2(x), \quad f_2'(x) = 2f_1(x) - f_2(x),$$

Setzen wir $y(x) := f_1(x)$, so ergibt die erste Gleichung:

$$y'(x) = f_2(x),$$

und aus der zweiten können wir schliessen:

$$y'' = 2y - y' \Rightarrow y'' + y' - 2y = 0$$

Also ist $y(x) = f_1(x)$ dann eine Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung.

(b) Wir schreiben:

$$f_1(x) := y(x), \quad f_2(x) := y'(x), \quad f_3(x) := y''(x)$$

Dann sei

$$f(x) := \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $f_1' = f_2$, $f_2' = f_3$ und aus der ursprünglichen Differnetialgleichung folgt $f_3' = 4f_3$. In Vektorform ergibt dies:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2(x) \\ f_3(x) \\ 4f_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} f(x).$$

Äquivalenz der Differentialgleichungen folgt wie oben.

1.4. Fundamentallösungen für 2×2-Matrizen

1. Es ist zuerst zu bemerken, dass die Lösung jeweils existiert und eindeutig ist, siehe Satz zur Existenz und Eindeutigkeit einer globalen Lösung eines linearen Systems von GDG in den Notizen von Dr. Ziltener.

   (a) Die Matrix ist in Diagonalform, also gilt gemäss der linearen Algebra:

$$\Phi(t) = \exp(At) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix}$$

   (b) Man sieht leicht, dass die Eigenwerte der Matrix $3, -4$ sind. Daher ist die Matrix diagonalisierbar. Wir berechnen eine Eigenbasis: Lösen wir $(A - 3Id)v = 0$, so betrachten wir das System

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ -7y \end{pmatrix} = 0$$

   Also $y = 0$ und $(1, 0)$ ist ein Eigenvektor. Für $(A + 4Id)v = 0$ finden wir das System:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x + 3y \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

   welches z.B. für $(3, -7)$ erfüllt ist. Definieren wir:

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix},$$

   so gilt:

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} =: D$$

   Dies bedeutet, dass die Fundamentallösung gegeben ist durch:

$$\Phi(t) = \exp(At) = S \exp(Dt) S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

   Daher folgt:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & \frac{3}{7} \cdot e^{3t} - \frac{3}{7} \cdot e^{-4t} \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix}$$

   (c) Man erkennt abermals leicht, dass die Eigenwerte der Matrix $3, -4$ sind. Daher ist die Matrix diagonalisierbar. Wir berechnen eine Eigenbasis: Lösen wir $(A - 3Id)v = 0$, so betrachten wir das System

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6x - 7y \end{pmatrix} = 0$$

Also ist $(7, 6)$ beispielsweise ein Eigenvektor. Für $(A + 4Id)v = 0$ finden wir das System:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x \\ 6x \end{pmatrix} = 0,$$

welches z.B. für $(0, 1)$ erfüllt ist. Definieren wir:

$$S := \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} := \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{6}{7} & 1 \end{pmatrix},$$

so gilt:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} =: D$$

Dies bedeutet, dass die Fundamentallösung gegeben ist durch:

$$\Phi(t) = \exp(At) = S \exp(Dt) S^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{6}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

Daher folgt:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ \frac{6}{7} \cdot e^{3t} - \frac{6}{7} \cdot e^{-4t} & e^{-4t} \end{pmatrix}$$

(d) Wir berechnen das charakteristische Polynom der Matrix:

$$\det(A - \lambda \cdot Id) = (3 - \lambda)(-4 - \lambda) - 18 = \lambda^2 + \lambda - 30 = (\lambda + 6)(\lambda - 5)$$

Somit sind $5, -6$ die Eigenwerte der Matrix und diese ist folglich diagonalisierbar. Wir berechnen eine Eigenbasis wie zuvor und finden für $(A - 5Id)v = 0$ das folgende System:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 3y \\ 6x - 9y \end{pmatrix} = 0,$$

und $(3, 2)$ ist beispielsweise eine Lösung. Analog lösen wir $(A + 6Id)v = 0$ durch das System:

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x + 3y \\ 6x + 2y \end{pmatrix} = 0,$$

was durch $(1, -3)$ gelöst wird. Daher definieren wir:

$$S := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} := \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix},$$

und damit gilt:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} =: D$$

Dies bedeutet, dass die Fundamentallösung gegeben ist durch:

$$\Phi(t) = \exp(At) = S\exp(Dt)S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

Daher folgt:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} \cdot e^{5t} + \frac{2}{11} \cdot e^{-6t} & \frac{3}{11} \cdot e^{5t} - \frac{3}{11} \cdot e^{-6t} \\ \frac{6}{11} \cdot e^{5t} - \frac{6}{11} \cdot e^{-6t} & \frac{2}{11} \cdot e^{5t} + \frac{9}{11} \cdot e^{-6t} \end{pmatrix}$$

2. Das Anfangswertproblem entspricht der Matrix aus Teilaufgabe b). Wir haben die Fundamentallösung $\Phi(t)$ bereits gefunden, sie lautet

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & \frac{3}{7} \cdot e^{3t} - \frac{3}{7} \cdot e^{-4t} \\ 0 & e^{-4t}. \end{pmatrix}$$

Das Anfangswertproblem lässt sich mit der Fundamentallösung wie folgt lösen:

$$F(t) = \Phi(t)F(0).$$

Also

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & \frac{3}{7} \cdot e^{3t} - \frac{3}{7} \cdot e^{-4t} \\ 0 & e^{-4t}. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7}e^{3t} - \frac{3}{7}e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix}.$$