2.1. Partielle Ableitungen, Jacobi-Matrix.

Um die partielle Ableitung nach der i-ten Variable x_i zu berechnen, betrachten wir die anderen Variablen als Konstanten (sie sind fixiert). Wir finden für jedes i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2x_i.$$

Im Punkt p sind alle Koordinaten 0 ausser $x_1 = 1$, also gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0, \quad \forall i \neq 1.$$

Die Jacobi Matrix von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt x ist die $1 \times n$ Matrix

$$df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \cdots & 2x_n \end{pmatrix}.$$

Ausgewertet im Punkt p ergibt dies

$$df(p) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

Die Jacobi Matrix ist also

$$dg(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \end{pmatrix}.$$

Ausgewertet im Punkt $p = (1,1)$ finden wir

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = 2, \quad dg(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist $h(x,y)$, also ein Vektor in $\mathbb{R}^3$. Die partielle Ableitung von h nach x ist der Vektor in $\mathbb{R}^3$, wo jede Komponente von h partielle nach x abgeleitet wird und ähnlich für y. Wir finden also

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ ye^{xy} \\ 3x^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ xe^{xy} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi Matrix von h ist die 3×2 Matrix mit diesen Vektoren also Spalten, also

$$dh(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ ye^{xy} & xe^{xy} \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ausgewertet im Punkt $p = (1, 1)$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ e \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ e \\ 0 \end{pmatrix}, \quad dh(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ e & e \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2. (Totale) Differenzierbarkeit und (totale) Ableitung.

Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist im Punkt p total differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{\|g(p+v) - g(p) - Av\|}{\|v\|} \to 0 \qquad \text{für } v \to 0.$$

Die gesuchte lineare Abbildung ist hier schon gegeben, nämlich $A(v_1, v_2) = p_2 v_1 + p_1 v_2$. Wir berechnen

$$g(p+v) - g(p) - Av = (p_1 + v_1)(p_2 + v_2) - p_1 p_2 - (p_2 v_1 + p_1 v_2) = v_1 v_2.$$

Gemäss der Youngschen Ungleichung aus Analysis 1 gilt $2|v_1 v_2| \leq v_1^2 + v_2^2$. Es folgt, dass

$$\frac{\left|g(p+v) - g(p) - Av\right|}{\|v\|} = \frac{|v_1 v_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \leq \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \to 0$$

für $v \to 0$. Also ist g im Punkt p total differenzierbar mit Ableitung gegeben durch A.

2.3. Kettenregel.

Es gilt $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und

$$h(x) = g(f(x)) = g(x_1, e^{x_2}) = x_1 e^{x_2}.$$

Wir haben in der vorherigen Aufgabe gezeigt, dass g in jedem Punkt total differenzierbar ist, somit auch im Punkt $f(p)$. Wir dürfen verwenden, dass f im Punkt p total differenzierbar ist. Aus der Kettenregl folgt nun, dass $g \circ f$ im Punkt p differenzierbar ist.

Die Ableitung dh von h im Punkt p ist laut Kettenregel die Komposition der Ableitungen $df(p)$ mit $dg(f(p))$. Dargestellt als Matrix (Jacobi Matrix) finden wir

$$df(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{x_2} \end{pmatrix}, \quad dg(y) = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 \end{pmatrix},$$

also in $p = (2,0)$ mit $f(p) = (2,1)$:

$$df(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad dg(f(p)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrix-Multiplikation führt zur Darstellung der Ableitung von h als Jacobi Matrix:

$$dh(p) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.4. Differenzierbarkeit und Ableitung der Norm.

Die Funktion $h(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ kann als Komposition $h(x) = g \circ f(x)$ geschrieben werden, wobei

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(y) = \sqrt{y}.$$

Die Funktion f ist als Polynom auf $\mathbb{R}^n$ in jedem Punkt total differenzierbar, siehe Bemerkung in der Aufgabenstellung. Die Funktion g ist auf dem Intervall $(0, \infty)$ differenzierbar. (Achtung: Im Punkt 0 ist g nicht differenzierbar). Da wir die Funktion h auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ betrachten, also weg vom Ursprung, ist h total differenzierbar. Dies folgt aus der Kettenregel: für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $f(x) \in (0, \infty)$, somit ist sowohl f im Punkt x und g im Punkt $f(x)$ total differenzierbar. Wir berechnen die Jacobi Matrizen

$$df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & \cdots 2x_n \end{pmatrix}, \quad dg(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Und mit der Kettenregel:

$$dh(x) = dg(f(x)) \cdot df(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} & \cdots \frac{x_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \end{pmatrix}.$$

2.5. Gradient und steilster Anstieg.

Der Gradient einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Transponierte der Jacobi Matrix von f, also

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \partial_{x_2} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x) \end{pmatrix}.$$

Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$ berechnen wir

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 8x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt p ist durch den auf 1 normierten Gradienten im Punkt p gegeben, also

$$\frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \nabla f(p).$$

Für $p = (1, 0)$ gilt

$$\nabla f(p) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\nabla f(p)\| = \sqrt{4 + 0} = 2.$$

Somit ist die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt p:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Niveaulinie $f^{-1}(\{1\})$ ist gegeben durch

$$f^{-1}(\{1\}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 4x_2^2 = 1\}.$$

Es handelt sich dabei um eine Ellipse mit Mittelunkt 0, Hauptachsen-Länge 1 und Nebenachsenlänge $\frac{1}{2}$.

Der Punkt $(1, 0)$ erfüllt $f(1, 0) = 1$ und liegt somit auf dieser Niveaulinie. Der Gradient einer Funktion f im Punkt p ist immer senkrecht zur Niveaulinie durch $f(p)$, also $f^{-1}(\{f(p)\})$.

2.6. Richtungsableitung

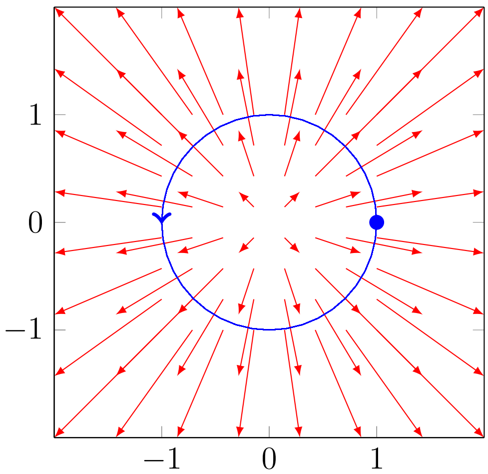
Die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt p in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $df(p)v$. In diesem Fall gilt $df(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$ und somit

$$df(1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2, \quad df(1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Die Richtung $(0, 1)$ ist im Punkt $(1, 0)$ tangential zur Niveaulinie $f^{-1}(\{1\})$, somit ist die Ableitung in diese Richtung 0. Die Richtung $(1, 0)$ hingegen zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $(1, 0)$. Die Ableitung in diese Richtung ist somit maximal (also das Maximum von $df(p)v$ über alle Vektoren v mit $\|v\| = 1$).

2.7. Wegintegral eines Vektorfeldes.

(a) In rot das Vektorfeld X und in blau der Weg γ mit Start- und Endpunkt und Umlaufrichtung eingezeichnet.



(b) Es gilt

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Das Euler-Vektorfeld ist einfach die Identitätsabbildung, also gilt

$$X(\gamma(t)) = \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Das Wegintegral lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \int x \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos(t)\sin(t) + \sin(t)\cos(t))\, dt = \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0. \end{aligned}$$

2.8. Konservativität eines Vektorfeldes, Potential.

Der Weg γ_x interpoliert jeweils zwischen dem Ursprung $0 \in \mathbb{R}^n$ und dem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, also

$$\gamma_x : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad \gamma_x(t) = tx, \quad \text{mit} \quad \dot{\gamma}_x(t) = x.$$

Die Funktion f lässt sich jeweils wie folgt berechnen:

$$f(x) = \int X \cdot d\gamma_x = \int_0^1 X(\gamma_x(t)) \cdot \dot{\gamma}_x(t)\, dt = \int_0^1 X(tx) \cdot x\, dt,$$

wobei auf der rechten Seite das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ zwischen den Vektoren $X(tx)$ und x berechnet werden muss. Falls das Vektorfeld X konservativ ist, dann muss f ein Potential für X sein, siehe Satz zu dem Potential eines konservativen stetigen Vektorfeldes im Skript von Dr. Ziltener. Falls also $\nabla f \neq X$ gilt, dann kann X nicht konservativ sein. Das Vorgehen in dieser Aufgabe entspricht der Methode zur Konservativität und Potential im Skript von Dr. Ziltener.

Für die beiden Vektorfelder in $\mathbb{R}^2$ ist am Ende der jeweiligen Teilaufgaben das Vektorfeld X gezeichnet. Für eine bessere Darstellung sind die Pfeile fünfmal kürzer dargestellt.

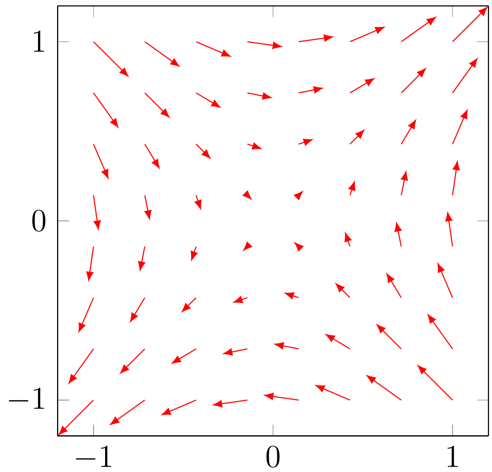
(a) Wir berechnen

$$f(x) = \int_0^1 X(tx)\cdot x\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} tx_2 \\ tx_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 (tx_2x_1+tx_1x_2)\,dt = 2x_1x_2\int_0^1 t\,dt = x_1x_2.$$

Für den Gradienten gilt

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}(x_1x_2) \\ \partial_{x_2}(x_1x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = X(x).$$

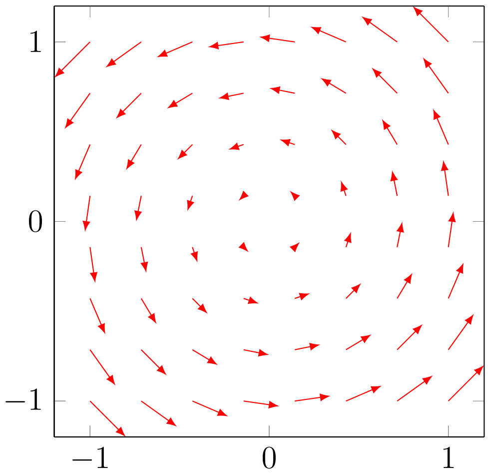
Also ist f ein Potential für X und X somit konservativ.



(b) Wir berechnen

$$f(x) = \int_0^1 X(tx)\cdot x\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} -tx_2 \\ tx_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 (-tx_2x_1+tx_1x_2)\,dt = 0.$$

Somit gilt $\nabla f(x) = 0 \neq X(x)$. Also ist f kein Potential für X und X kann deshalb nicht konservativ sein.



(c) Wir berechnen

$$f(x) = \int_0^1 X(tx) \cdot x \, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 x_2 x_3 \\ t^2 x_3 x_1 \\ t^2 x_1 x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} dt = 3x_1x_2x_3 \int_0^1 t^2 \, dt = x_1x_2x_3.$$

Für den Gradienten finden wir

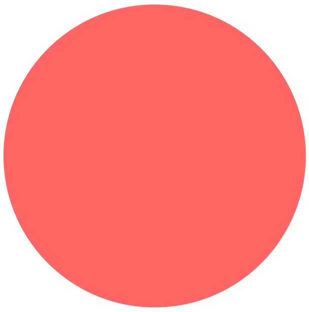
$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}(x_1x_2x_3) \\ \partial_{x_2}(x_1x_2x_3) \\ \partial_{x_3}(x_1x_2x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2x_3 \\ x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} = X(x).$$

Also ist f ein Potential für X und X somit konservativ.

2.9. Einfacher Zusammenhang, Sternförmigkeit und Konvexität einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

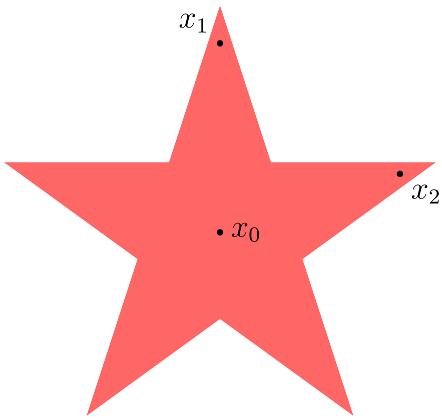
Zur Erinnerung: Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst konvex, falls für alle Punkte $x, y \in S$ und für jedes $t \in [0,1]$ der Punkt $(1-t)x + ty$ in S enthalten ist. Hingegen heisst eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig, falls es einen Punkt $x_0 \in S$ gibt, sodass für jeden Punkt $x \in S$ und für jedes $t \in [0,1]$ der Punkt $(1-t)x_0 + tx$ in S enthalten ist. Wir bemerken, dass die Menge $\{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}$ gerade die Verbindungsstrecke zwischen x und y ist. Das heisst, dass bei einer konvexen Menge S die Verbindungsstrecke zwischen allen Punkten $x, y \in S$ in der Menge S enthalten ist. Hingegen gibt es in einer sternförmigen Menge S (mindestens) einen Punkt x_0, sodass die Verbindungsstrecke zwischen x_0 und jedem anderen Punkt $x \in S$ in S enthalten ist.

(a) Die Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ ist z.B. eine sternförmige Menge. Die Verbindungsstrecke zwischen dem Mittelpunkt und jedem anderen Punkt ist in der Kreisscheibe enthalten. Die Kreisscheibe ist sogar konvex, also die Verbindungsstrecke zwischen allen Punkten der Kreisscheibe ist in derselben enthalten.



(b) Sei $S \in \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Wähle irgend ein Punkt $x_0 \in S$. Dann ist wegen der Konvexität von S für jedes $x \in S$ und für jedes $t \in [0,1]$ der Punkt $(1-t)x_0 + tx$ in S enthalten. Die konvexe Menge S ist also auch sternförmig.

(c) Wie der Name erwarten lässt, ist ein Stern sternförmig. Die unten abgebildete Menge in $\mathbb{R}^2$ ist sternförmig aber nicht konvex. Die Verbindungsstrecke zwischen dem Punkt x_0 und jedem anderen Punkt der Menge ist komplett in der Menge enthalten, wie einfach zu erkennen ist. Hingegen ist die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten x_1 und x_2 nicht komplett in der Menge enthalten, also kann die Menge nicht konvex sein.



(d) Sei S eine sternförmige Menge und sei $x_0 \in S$ ein Punkt, sodass $(1-t)x_0 + tx \in S$ für alle $x \in S$ und $t \in [0,1]$. Ersetzten wir t mit $1-t$ sehen wir, dass auch $(1-t)x + tx_0 \in S$ für alle $x \in S$ und $t \in [0,1]$. Sei weiter $\gamma : S^1 \to S$ eine beliebige Schleife in S. Wir bezeichnen mit $\gamma_0 : S^1 \to S$ die konstante Schleife $\gamma_0(y) = x_0$ für alle $y \in S^1$. Dank der Sternförmigkeit von S können wir γ zur konstanten Schleife γ_0 zusammenschrumpfen ohne die Menge S zu verlassen. Das heisst wir konstruieren eine Homotopie $h : [0,1] \times S^1 \to S$ wie folgt:

$$h(t,y) = (1-t)\gamma(y) + tx_0.$$

Dann gilt für alle $y \in S^1$: $h(0,y) = \gamma(y)$ und $h(1,y) = x_0$ konstant. Desweiteren gilt $h(t,y) \in S$ für alle $y \in S^1$ und $t \in [0,1]$, da S sternförmig ist. Offensichtlich ist h stetig, also haben wir eine Homotopie in S zwischen γ und der konstanten Schleife γ_0 konstruiert. Da γ beliebig war ist S einfach zusammenhängend (siehe Definition 3.36 (einfach zusammenhängend) im Skript von Dr. Ziltener).

(e) Intuitiv gibt es zu jeder Schleife $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine Gerade durch den Ursprung in $\mathbb{R}^3$, sodass kein Punkt im Bild von γ auf dieser Gerade liegt. Wir können dann einen Punkt $x_0 \neq 0$ (also nicht den Ursprung) auf dieser Gerade wählen und die Schleife γ wie in der vorherigen Teilaufgabe zu diesem Punkt zusammenschrumpfen, also

$$h : [0,1] \times S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \qquad h(t,y) = (1-t)\gamma(y) + tx_0.$$

Da für alle $y \in S^1$ der Punkt $\gamma(y)$ nicht auf der gewählten Gerade liegt, liegt auch der Punkt $(1-t)\gamma(y) + tx_0$ nicht auf der Gerade, ausser $t = 1$ in welchem Fall $h(1,y) = x_0 \neq 0$. Somit gilt in der Tat $h(t,y) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ für alle $y \in S^1$ und alle $t \in [0,1]$ (da der Ursprung in der Gerade enthalten ist und $h(t,y)$ nicht auf der Gerade liegen kann) und wir haben eine Homotopie zwischen γ und einer konstanten Schleife gefunden.

(f) Unser Beweis (mit Hilfe der Bemerkung nach der Aufgabenstellung) funktioniert ähnlich, aber etwas anders als der skizzierte Beweis in der vorherigen Teilaufgabe. Als Gerade wählen wir die z-Achse. Sei $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine beliebige Schleife. Falls die Schleife γ die z-Achse schneidet, verschieben wir die Schleife zuerst ein bisschen, damit das Bild von γ disjunkt von der z-Achse ist. Dies erfolt mit dem Hinweis in der Bemerkung. Nämlich verwenden wir ohne Begründung, dass es eine Homotopie gibt, also eine stetige Abbildung, $h_1 : [0,1] \times S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit

$$h_1(0,y) = \gamma(y), \quad \forall y \in S^1, \qquad \Big(h_1^1(1,y), h_1^2(1,y)\Big) \neq (0,0), \quad \forall y \in S^1,$$

wobei $h_1^1(1,y)$ und $h_1^2(1,y)$ die x- und y-Komponente des Vektors $h_1(1,y) \in \mathbb{R}^3$ sind. Somit ist h_1 eine Homotopie zwischen der ursprügnlichen Schleife $\gamma(y) = h_1(0,y)$ und einer Schleife $\gamma_1(y) := h_1(1,y)$, welche disjunkt von der z-Achse ist (die z-Achse besteht gerade aus den Punkten in $\mathbb{R}^3$ mit x- und y-Komponente gleich Null).

Nun wählen wir den Punkt $x_0 = (0,0,1)$ auf der z-Achse. Wir definieren eine Homotopie zwischen der Schleife γ_1 und der konstanten Schleife $\gamma_0(y) = x_0$ wie folgt:

$$h_2 : [0,1] \times S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \qquad h_2(t,y) = (1-t)\gamma_1(y) + tx_0$$

Oder in Komponenten geschrieben

$$\begin{pmatrix} h_2^1(t,y) \\ h_2^2(t,y) \\ h_2^3(t,y) \end{pmatrix} = (1-t)\begin{pmatrix} \gamma_1^1(y) \\ \gamma_1^2(y) \\ \gamma_1^3(y) \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)\gamma_1^1(y) \\ (1-t)\gamma_1^2(y) \\ (1-t)\gamma_1^3(y) + t \end{pmatrix}.$$

Da für alle $y \in S^1$ gilt

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^1(y) \\ \gamma_1^2(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^1(1,y) \\ h_1^2(1,y) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

gilt auch

$$\begin{pmatrix} (1-t)\gamma_1^1(y) \\ (1-t)\gamma_1^2(y) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall y \in S^1, \forall t \in [0,1).$$

Für $t = 1$ gilt $h(1,y) = x_0 \neq 0$ für alle $y \in S^1$. Somit haben wir $h_2(t,y) \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ für alle $y \in S^1$ und $t \in [0,1]$. Wir haben also eine stetige Abbildung h_2 konstruiert mit Bild in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Nun kann man die beiden Homotopien h_1 und h_2 noch zusammensetzen zu der gewünschten Homotopie h zwischen γ und der konstanten Schleife γ_0. Dazu definieren wir

$$h : [0,1] \times S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \qquad h(t,y) = \begin{cases} h_1(2t,y) & \text{für} \quad t \in [0,\frac{1}{2}] \\ h_2(2t-1,y) & \text{für} \quad t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

Wir bemerken, dass das Bild von h tatsächlich in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ enthalten ist, da h_1 und h_2 ihr Bild in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ haben. Desweiteren sind h_1 und h_2 stetig und es gilt $h_1(1,y) = h_2(0,y)$ für alle $y \in S^1$, also ist auch h stetig. Schliesslich sehen wir, dass $h(0,y) = \gamma(y)$ und $h(1,y) = x_0$ für alle $y \in S^1$. h ist also die gewünschte Homotopie zwischen γ und einer konstanten Schleife und $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist somit einfach zusammenhängend.

2.10. Charakterisierung der Konservativität eines Vektorfeldes mittels partieller Ableitungen.

Jedes konservative Vektorfeld muss die Bedingung $D_i X^j = D_j X^i$ für alle i, j erfüllen. Diese Bedingung ist also notwendig für die Konservativität eines Vektorfeldes. Wir bemerken, dass die Vektorfelder in dieser Aufgabe alle auf $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ definiert sind. Da $\mathbb{R}^n$ für jedes n einfach zusammenhängend ist, ist in diesem Fall die Bedingung $D_i X^j = D_j X^i$ für alle i, j auch hinreichend um die Konservativität von X zu schliessen, siehe Satz zur Charakterisierung der Konservativität mittels partieller Ableitungen, Integrabilitätsbedingung in den Notizen von Dr. Ziltener. Achtung: Dies stimmt nicht für nicht-einfach zusammenhängende Gebiete. Man bemerke, dass der Fall $i = j$ trivial ist und nicht untersucht werden muss.

(a) Es gilt $X^1(x) = x_2$ und $X^2(x) = x_1$. Also

$$D_1 X^2(x) = 1 = D_2 X^1(x).$$

Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, ist X somit konservativ. Dies haben wir in Aufgabe 2.8 bereits gesehen durch explizites Berechnen eines Potentials f für X.

(b) Es gilt $X^1(x) = -x_2$ und $X^2(x) = x_1$. Also

$$D_1X^2(x) = 1 \neq -1 = D_2X^1(x).$$

Somit ist X nicht konservativ. Dies haben wir in Aufgabe 2.8 bereits gesehen.

(c) Wir berechnen:

$$D_2X^1(x) = D_1X^2(x) = x_3, \quad D_3X^1(x) = D_1X^3(x) = x_2, \quad D_2X^3(x) = D_3X^2(x) = x_1.$$

Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, ist X somit konservativ. Dies haben wir in Aufgabe 2.8 bereits gesehen durch explizites Berechnen eines Potentials f für X.

(d) Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ein fixer Vektor in $\mathbb{R}^3$. Das Kreuzprodukt ergibt

$$v \times x = \begin{pmatrix} v_2x_3 - v_3x_2 \\ v_3x_1 - v_1x_3 \\ v_1x_2 - v_2x_1 \end{pmatrix}.$$

Für das Vektorfeld $X(x) = v \times x$ gilt also

$$X^1(x) = v_2x_3 - v_3x_2, \quad X^2(x) = v_3x_1 - v_1x_3, \quad X^3(x) = v_1x_2 - v_2x_1.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} &D_2X^1(x) = -v_3, \quad D_3X^1(x) = v_2, \quad D_3X^2(x) = -v_1, \\ &D_1X^2(x) = v_3, \quad D_1X^3(x) = -v_2, \quad D_2X^3(x) = v_1. \end{aligned}$$

Die Bedingung $D_iX^j(x) = D_jX^i(x)$ ist also nicht erfüllt und das Vektorfeld damit nicht konservativ.