3.1. Rotation eines Vektorfeldes.

Die Rotation ist definiert für Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$. Im Fall von $\mathbb{R}^2$ als skalare Funktion

$$\mathrm{rot} X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{rot} X(x) = D_1 X^2(x) - D_2 X^1(x),$$

und im Fall von $\mathbb{R}^3$ als Vektorfeld

$$\vec{\mathrm{rot}} X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{\mathrm{rot}} X(x) = \begin{pmatrix} D_2 X^3(x) - D_3 X^2(x) \\ D_3 X^1(x) - D_1 X^3(x) \\ D_1 X^2(x) - D_2 X^1(x) \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass in beiden Fällen (auf $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) die Rotation genau dann verschwindet, wenn $D_i X^j(x) = D_j X^i(x)$ für alle i, j. Somit kann für ein Vektorfeld auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ die Rotation verwendet werden, um das Vektorfeld auf Konservativität zu prüfen.

In der vorigen Serie haben wir bereits alle relevanten partiellen Ableitungen berechnet und wir fügen sie hier nur zur Rotation zusammen:

(a) $\mathrm{rot} X(x) = 0$.

(b) $\vec{\mathrm{rot}} X(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c)

$$\vec{\mathrm{rot}} X(x) = \begin{pmatrix} D_2 X^3(x) - D_3 X^2(x) \\ D_3 X^1(x) - D_1 X^3(x) \\ D_1 X^2(x) - D_2 X^1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \\ 2v_3 \end{pmatrix} = 2v.$$

3.2. Nicht-konservatives Vektorfeld mit verschwindender Rotation auf nicht-einfach zusammenhängendem Gebiet.

(a) Falls X konservativ wäre, dann müsste das Wegintegral $\int X \cdot d\gamma$ entlang jedem geschlossenen Weg γ verschwinden, siehe Satz 2.29 (Charakterisierung der Konservativität eines stetigen Vektorfeldes mittels Wegintegrale) in den Notizen von Dr. Ziltener. Wir berechnen das Wegintegral von X entlang dem folgenden Weg (also entlang dem Einheitskreis):

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass für die Norm gilt

$$\|\gamma(t)\|^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1,$$

also finden wir

$$X(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\gamma(t)\|^2}\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$$

Das Wegintegral ergibt also

$$\begin{aligned}\int X \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} X(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}dt\\ &= \int_0^{2\pi}(\sin^2(t)+\cos^2(t))\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.\end{aligned}$$

Da das Wegintegral von X entlang des geschlossenen Wegs γ nicht Null ergibt, kann das Vektorfeld nicht konservativ sein.

(b) Wir berechnen $\mathrm{rot}X(x) = D_1X^2(x) - D_2X^1(x)$. Es gilt

$$X^1(x) = \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, \quad X^2(x) = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}.$$

Mit der Quotientenregel finden wir für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}X^2(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} = \frac{x_1^2+x_2^2-2x_1x_1}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2},\\ \frac{\partial}{\partial x_2}X^1(x) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2} = \frac{-(x_1^2+x_2^2)+2x_2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}.\end{aligned}$$

Somit sehen wir, dass

$$\mathrm{rot}X(x) = 0.$$

(c) Das Vektorfeld ist nicht konservativ, obwohl die Rotation verschwinden. Dies ist kein Widerspruch, denn das Vektorfeld ist auf dem Gebiet $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiert und dieses Gebiet ist nicht einfach zusammenhängend. Insbesondere gibt es in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ keine Homotopie zwischen dem Weg γ in der ersten Teilaufgabe und einem konstanten Weg.

3.3. Gemischte zweite Ableitungen.

Die Funktion f ist glatt auf ganz $\mathbb{R}^2$, also gilt insbesondere $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Laut dem Satz von Schwarz, siehe z.B. Satz 7.5.1 im Skript von Prof. Struwe, stimmen somit die gemischten zweiten partiellen Ableitungen überein, also

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y), \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Wir dürfen also die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen und berechnen den einfacheren Ausdruck $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f$. Da die Funktion f nämlich nicht von x abhängt, gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

und somit auch

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

3.4. Taylor-Polynom.

(a) Wir berechnen zuerst die partiellen Ableitungen der Funktion f bis zur vierten Ordnung. Wir schreiben $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und bemerken, dass für $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt

$$\partial_{x_j}\|x\|^2 = \partial_{x_j}\sum_{k=1}^n x_k^n = 2x_j.$$

Mit der Kettenregel finden wir

$$\partial_{x_j}f(x) = \partial_{x_j}e^{\|x\|^2} = 2x_j e^{\|x\|^2}.$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung berechnen wir mittels Produkt- und Kettenregel und finden für $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\partial_{x_k}\partial_{x_j}f(x) = (2\delta_{jk} + 4x_j x_k)e^{\|x\|^2},$$

wobei $\delta_{jk} = 1$ falls $j = k$ und $\delta_{jk} = 0$ falls $j \neq k$ (dies kommt von $\partial_{x_k}x_j = \delta_{jk}$). Die partiellen Ableitungen dritter Ordnung ergeben sich auf ähnliche Weise:

$$\partial_{x_l}\partial_{x_k}\partial_{x_j}f(x) = (4\delta_{jl}x_k + 4\delta_{kl}x_j + 4\delta_{jk}x_l + 8x_j x_k x_l)e^{\|x\|^2},$$

wobei $j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ beliebig. Für die partiellen Ableitungen vierter Ordnung könnte man jetzt bemerken, dass wir nur am Wert der Ableitungen an der Stelle 0 interessiert sind. Deshalb könnte man den letzten Term oben in der Berechnung weglassen, da die Ableitung davon verschwindet, wenn wir $x = 0$ setzen. Wir schreiben nichtsdestotrotz die partiellen Ableitungen vierter Ordnung komplett auf, nämlich

$$\begin{aligned}\partial_{x_m}\partial_{x_l}\partial_{x_k}\partial_{x_j}f(x) = \Big(&4\delta_{jl}\delta_{km} + 4\delta_{kl}\delta_{jm} + 4\delta_{jk}\delta_{lm} + 8\delta_{jm}x_k x_l + 8\delta_{km}x_j x_l \\ &+ 8\delta_{lm}x_j x_k + 8\delta_{jl}x_k x_m + 8\delta_{kl}x_j x_m + 8\delta_{jk}x_l x_m + 16x_j x_k x_l x_m\Big)e^{\|x\|^2},\end{aligned}$$

wobei $j, k, l, m \in \{1, 2, \dots, n\}$ beliebig.

Setzen wir nun $x = 0$, also $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, $x_n = 0$, dann verschwindet jeder Term, der noch eine Komponente von x als Faktor beinhaltet. Ausserdem gilt $e^{\|0\|} = e^0 = 1$. Die partiellen Ableitungen bis zu vierter Ordnung an der Stelle $x = 0$ sind also

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1, \\
\partial_{x_j} f(0) &= 0, \\
\partial_{x_k}\partial_{x_j} f(0) &= 2\delta_{jk}, \\
\partial_{x_l}\partial_{x_k}\partial_{x_j} f(0) &= 0, \\
\partial_{x_m}\partial_{x_l}\partial_{x_k}\partial_{x_j} f(0) &= 4\delta_{jl}\delta_{km} + 4\delta_{kl}\delta_{jm} + 4\delta_{jk}\delta_{lm}
\end{aligned}$$

Da die ersten partiellen Ableitungen alle verschwinden, stimmen das Taylor-Polynom nullter und erster Ordnung im Punkt 0 überein:

$$T_0 f(x, 0) = T_1 f(x, 0) = f(0) = 1.$$

Weiter stimmen das Taylor-Polynom zweiter und dritter Ordnung im Punkt 0 überein, da alle partiellen Ableitungen dritter Ordnung dort verschwinden. Und zwar finden wir

$$T_2 f(x, 0) = T_3 f(x, 0) = f(0) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}\partial_{x_j} f(0) x_j x_k = 1 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{jk} x_j x_k = 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j^2,$$

wobei wir bemerkt haben, dass bei der Summe über k alle Terme verschwinden ausser der Term mit $k = j$. Schliesslich berechnen wir das Taylor-Polynom vierter Ordnung:

$$\begin{aligned}
T_4 f(x, 0) &= f(0) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}\partial_{x_j} f(0) x_j x_k + \frac{1}{4!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \partial_{x_m}\partial_{x_l}\partial_{x_k}\partial_{x_j} f(0) x_j x_k x_l x_m \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} (\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{kl}\delta_{jm} + \delta_{jk}\delta_{lm}) x_j x_k x_l x_m \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} (\delta_{jl} x_j x_k^2 x_l + \delta_{kl} x_j^2 x_k x_l + \delta_{jk} x_j x_k x_l^2) \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j^2 x_k^2,
\end{aligned}$$

wobei wir am Schluss bemerkt haben, dass alle drei Terme dasselbe Resultat ergeben, nämlich $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j^2 x_k^2 = (\sum_{j=1}^{n} x_j^2)^2$.

(b) Wir verwenden für diese Aufgabe die Taylor-Formel bis zu dritter Ordnung um den Punkt $p = 0$. Wir bemerken zuerst, dass f glatt ist auf $\mathbb{R}^n$, also insbesondere

$f \in C^3(\mathbb{R}^n)$. Laut der Taylor-Formel, siehe z.B. Satz 7.5.2 im Skript von Prof. Struwe, gibt es also zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ ein $y_x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y_x\| \leq \|x\|$, sodass gilt

$$f(x) = f(0)+\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} f(0)x_j+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(0)x_jx_k+\frac{1}{3!}\sum_{j,k,l=1}^{n} \partial_{x_j}\partial_{x_k}\partial_{x_l} f(y_x)x_jx_kx_l.$$

(Die Notation y_x dient um daran zu erinnern, dass der Punkt y_x von x abhängt). Wir können diese Taylor-Formel auch umschreiben zu

$$f(x) - T_2f(x,0) = \frac{1}{3!}\sum_{j,k,l=1}^{n} \partial_{x_j}\partial_{x_k}\partial_{x_l} f(y_x)x_jx_kx_l.$$

In der vorherigen Teilaufgabe haben wir das Taylor-Polynom zweiten Grades um den Punkt 0 gefunden, nämlich

$$T_2f(x,0) = 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1 + \|x\|^2.$$

Nehmen wir also den Absolutwert der Formel oben, so finden wir

$$\Big|f(x) - 1 - \|x\|^2\Big| = \frac{1}{6}\Big|\sum_{j,k,l=1}^{n} \partial_{x_j}\partial_{x_k}\partial_{x_l} f(y_x)x_jx_kx_l\Big| \leq \frac{1}{6}\sum_{j,k,l=1}^{n}\Big|\partial_{x_j}\partial_{x_k}\partial_{x_l} f(y_x)\Big|\Big|x_jx_kx_l\Big|.$$

Wir bemerken, dass für jedes $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt $x_j \leq \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$, also gilt auch

$$|x_jx_kx_l| = |x_j||x_k||x_l| \leq \|x\|^3$$

für alle $j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wir haben also

$$\Big|f(x) - 1 - \|x\|^2\Big| \leq \frac{1}{6}\sum_{j,k,l=1}^{n}\Big|\partial_{x_j}\partial_{x_k}\partial_{x_l} f(y_x)\Big|\|x\|^3,$$

und es bleibt noch zu zeigen, dass für alle j, k, l und alle $x \in \overline{B}_1^n(0)$ die Funktion $\partial_{x_j}\partial_{x_k}\partial_{x_l} f(y_x)$ beschränkt ist. Dazu bemerken wir zuerst, dass laut der Taylor-Formel gilt $\|y_x\| \leq \|x\|$. Somit ist für $x \in \overline{B}_1^n(0)$ auch $y_x \in \overline{B}_1^n(0)$. Weiter ist $f \in C^3(\mathbb{R}^n)$ also sind die partiellen Ableitungen dritter Ordnung von f stetige Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Eine stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{B}_1^n(0)$ besitzt ein Maximum. Insbesondere besitzt für alle j, k, l die Funktion $\partial_{x_j}\partial_{x_k}\partial_{x_l} f$ ein Maximum auf $\overline{B}_1^n(0)$. Somit existiert ein $C \in [0, \infty)$, sodass

$$\frac{1}{6}\sum_{j,k,l=1}^{n}\Big|\partial_{x_j}\partial_{x_k}\partial_{x_l} f(y_x)\Big| \leq C, \quad \forall x \in \overline{B}_1^n(0).$$

Eingesetzt in die Abschätzung oben folgt das gewünschte Resultat.

3.5. Kritischer Punkt, Hesse-Matrix, striktes lokales Minimum/Maximum, Sattelpunkt.

Wir berechnen jeweils zuerst den Gradienten

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix}$$

und die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(x,y) & \partial_y \partial_x f(x,y) \\ \partial_x \partial_y f(x,y) & \partial_y^2 f(x,y) \end{pmatrix}$$

der Funktion f im Punkt (x,y). Die kritischen Punkte lassen sich durch lösen der Gleichung $\nabla f(x,y) = 0$ bestimmen. Wir setzen dann jeden kritischen Punkt in die (Matrix-wertige) Funktion $H_f(x,y)$ ein, um die Hesse-Matrix im kritischen Punkt zu studieren.

(Wir bemerken übrigens, dass alle Funktionen in der Aufgabenstellung glatt sind, also gilt laut dem Satz von Schwarz $\partial_y \partial_x f = \partial_x \partial_y f$. Das heisst die Hesse-Matrix ist symmetrisch und wir müssen nur einer der beiden nebendiagonalen Einträgen berechnen.)

(a) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ y^2 - 1 \end{pmatrix}, \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$

Kritische Punkte: $\nabla f(x,y) = 0$ bedeutet $x^2 - 1 = 0$ und $y^2 - 1 = 0$. Jede der Gleichungen hat zwei Lösungen $x = \pm 1$ und $y = \pm 1$. Das heisst es gibt insgesamt vier kritische Punkte:

$$p_1 = (1,1), \quad p_2 = (1,-1), \quad p_3 = (-1,1), \quad p_4 = (-1,-1).$$

Für die Hesse-Matrix in diesen Punkten finden wir

$$H_f(p_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(p_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H_f(p_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(p_4) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Im Punkt p_1 ist die Hesse-Matrix positiv definit, also ist der kritische Punkt p_1 eine lokale Minimalstelle von f. Im Punkt p_4 ist die Hesse-Matrix negativ definit, also ist p_4 ein lokale Maximalstelle von f. In den Punkten p_2 und p_3 ist die Hesse-Matrix jeweils indefinit, also besitzt sowohl positive als auch negative Eigenwerte, somit handelt es sich bei p_2 und p_3 um Sattelpunkte von f.

(b) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix}, \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Kritische Punkte: $\nabla f(x,y) = 0$ ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0, \\ x + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung, nämlich

$$p = (0,0).$$

Die Hesse-Matrix in p ist oben gegeben (die Hesse-Matrix ist konstant auf ganz $\mathbb{R}^2$). Um den kritischen Punkt zu klassifizieren müssen wir die Eigenwerte der Hesse-Matrix bestimmen. Das charakteristische Polynom ist

$$\det(H_f(p) - \lambda\,\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1).$$

Die Eigenwerte der Hesse-Matrix sind also 3 und 1. Somit ist die Hesse-Matrix positiv definit und der Punkt p ist eine lokale Minimalstelle von f.

(c) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Kritische Punkte: $\nabla f(x,y) = 0$ hat genau die Lösung

$$p = (0,0).$$

Die Hesse-Matrix in p ist oben gegeben. Wir berechnen ihre Eigenwerte:

$$\det(H_f(p) - \lambda\,\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1).$$

Die Eigenwerte der Hesse-Matrix sind also 1 und -1. Somit ist die Hesse-Matrix indefinit und der Punkt p ist ein Sattelpunkt.

(d) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} \\ 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} (2+4x^2)e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & (2+4y^2)e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

Kritische Punkte: $\nabla f(x,y) = 0$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 2xe^{x^2+y^2} &= 0 \\ 2ye^{x^2+y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Da $e^{x^2+y^2} > 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, hat dieses Gleichungssystem genau die Lösung

$$p = (0, 0).$$

Eingesetzt in $H_f(x, y)$ finden wir als Hesse-Matrix im Punkt p:

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine positiv definite Matrix, also handelt es sich bei p um eine lokale Minimalstelle.

(e) $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y^3 \end{pmatrix}, \qquad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$

Kritische Punkte: $\nabla f(x, y) = 0$ hat genau die Lösung

$$p = (0, 0).$$

Die Hesse-Matrix im Punkt p ist

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist nicht positiv definit, sondern nur positiv semidefinit. Also einer der Eigenwerte ist Null, während der andere positiv ist. Die Klassifizierung des kritischen Punktes anhand der Hesse-Matrix ist hier uneindeutig. Es könnte sich beim Punkt p also sowohl um eine lokale Minimalstelle als auch um einen Sattelpunkt handeln. Um den kritischen Punkt zu klassifizieren könnte man nun weitere Ableitungen anschauen. Jedoch bemerken wir auch sofort, dass

$$f(x, y) = x^2 + y^4 > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

während $f(0, 0) = 0$. Somit ist der Punkt $(0, 0)$ offensichtlich eine lokale Minimalstelle.

(f) $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -4y^3 \end{pmatrix}, \qquad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$

Kritische Punkte: $\nabla f(x, y) = 0$ hat genau die Lösung

$$p = (0, 0).$$

Die Hesse-Matrix im Punkt p ist

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Auch hier ist die Klassifizierung des kritischen Punktes anhand der Hesse-Matrix uneindeutig. Wieder könnte es sich sowohl um eine lokale Minimalstelle oder ein Sattelpunkt handeln. Wir haben wieder $f(0,0) = 0$, aber diesmal gilt

$$f(x,0) = x^2 > 0, \quad f(0,y) = -y^4 < 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Somit handelt es sich bei $(0,0)$ um einen Sattelpunkt von f (es gibt sowohl Richtungen entlang denen f zunimmt und Richtungen entlang denen f abnimmt).

3.6. Taylorpolynom, Multi-Index-Schreibweise.

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
|\alpha| &= 4 + 0 + 1 = 5, \\
\alpha! &= 4! \cdot 0! \cdot 1! = 4! = 24, \\
\binom{k}{\alpha} &= \frac{|\alpha|!}{\alpha!} = \frac{5!}{4!} = 5, \\
v^\alpha &= v_1^4 v_2^0 v_3^1 = 2^4 \cdot 3 = 48, \\
\partial^\alpha f(x) &= D_1^4 D_2^0 D_3^1 f(x) = \partial_{x_1}^4 \partial_{x_3} f(x) = 5! x_1 x_2 = 120 x_1 x_2.
\end{aligned}$$

(b) Mit der Multi-Index-Schreibweise lässt sich das Taylor-Polynom m-ter Ordnung von f um 0 wie folgt schreiben:

$$T_{f,0}^m(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^n \\ |\beta| = k}} \frac{1}{\beta!} D_\beta f(0) x^\beta,$$

siehe Proposition zum Taylorpolynom in Multi-Index-Schreibweise in den Notizen von Dr. Ziltener. Nun gilt für die Funktion $f(x) = x^\alpha$:

$$D^\beta f(0) = \begin{cases} \alpha! & \text{falls} \quad \beta = \alpha \\ 0 & \text{falls} \quad \beta \neq \alpha \end{cases}$$

In der Tat: für $\beta = \alpha$ finden wir

$$D^\alpha x^\alpha = D_1^{\alpha_1} x_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} x_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} x_n^{\alpha_n} = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n! = \alpha!$$

Falls hingegen $\beta \neq \alpha$ mit $|\beta| \leq m = |\alpha|$, dann gibt es mindestens einen Index $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sodass $\beta_j < \alpha_j$. Also beinhaltet die Ableitung $D^\beta x^\alpha$ den Faktor $x_j^{\alpha_j - \beta_j}$ mit $\alpha_j - \beta_j \geq 1$. Somit verschwindet $D^\beta x^\alpha$ wenn wir $x = 0$ setzen. In die Formel für das Taylor-Polynom eingesetzt, finden wir schliesslich

$$T_{f,0}^m(x) = x^\alpha.$$

Dieses Resultat war auch zu erwarten, da x^α bereits ein Polynom m-ten Grades ist, also ist das Polynom m-ten Grades, welches es am besten approximiert x^α selbst.

(c) Die Funktion in der Aufgabenstellung kann geschrieben werden als x^α mit $\alpha = (2,1)$. Laut der vorherigen Teilaufgabe gilt also $T^3_{f,0}(x) = x_1^2 x_2$. Dies könnte man auch direkt berechnen.

3.7. Nichtlineares Gleichungssystem.

(a) Wir verwenden den Umkehrsatz, siehe z.B. Umkehrsatz in den Notizen von Dr. Ziltener (hier ist $x_0 = (0,0)$). Dazu betrachten wir die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + e^{x_2} \\ e^{-x_1} + x_2 \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass diese Abbildung glatt ist, also $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Des Weiteren gilt $f(0,0) = (1,1)$. Die Ableitung von f (Jacobi-Matrix) ist

$$df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & e^{x_2} \\ -e^{-x_1} & 1 \end{pmatrix},$$

also gilt

$$df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Determinante $\det(df(0,0)) = 2$ nicht Null ist, ist die Jacobi-Matrix $df(0,0)$ invertierbar. Somit sind die Bedingungen für den Umkehrsatz erfüllt und der Satz liefert offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $V = f(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(0,0) \in U$ und $f(0,0) = (1,1) \in V$ und eine Abbildung $g : V \to U$, sodass

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in U, \qquad f(g(y)) = y \quad \forall y \in V. \tag{1}$$

Da die ursprüngliche Abbildung f glatt ist, ist laut dem Umkehrsatz auch g glatt. Da U eine offene Umgebung von $(0,0)$ ist, existiert ein $r > 0$, sodass der Ball $B_r((0,0))$ in U enthalten ist. Der Punkt $(1,1) = f(0,0)$ ist im Bild $f(B_r((0,0)))$ enthalten und, da $g = f|_U^{-1}$ insbesondere stetig ist, ist $f(B_r((0,0)))$ als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung auch offen. Somit enthält $f(B_r((0,0)))$ ein offener Ball um $(1,1)$, also es existiert ein $r' > 0$, sodass $B_{r'}((1,1)) \subseteq f(B_r((0,0)))$. Nun besitzt laut (1) jedes $y \in B_{r'}((1,1))$ die eindeutige Lösung $x = g(y) \in B_r((0,0))$ zur Gleichung $f(x) = y$.

Alternativ könnte man hier ähnlich wie in der vorherigen Teilaufgabe vorgehen und den Satz von der impliziten Funktion auf die Funktion

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 + e^{x_2} - y_1 \\ e^{-x_1} + x_2 - y_2 \end{pmatrix}$$

anwenden (im Punkt $x_0 = (0,0)$, $y_0 = (1,1)$). Gesucht ist dann eine implizite Funktion $g : U \to V$ mit $f(g(y), y)$, wobei $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $(1,1) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$. Also muss man die Ableitung von f nach x im Punkt $(0,0,1,1)$ betrachten. Dies liefert genau die Selbe invertierbare Matrix wie oben und der Satz von der impliziten Funktion ist anwendbar.

(b) Laut dem Umkehrsatz ist die Ableitung der Funktion $g = f|_U^{-1}$ gegeben durch

$$dg(y) = df(g(y))^{-1}, \quad \forall y \in V.$$

Dies kann man leicht erkennen, wenn man die Gleichung $f(g(y)) = y$ nach y ableitet und die Kettenregel verwendet. Dann erhalten wir nämlich

$$df(g(y))dg(y) = \mathrm{id}$$

und Matrix-Multiplikation von links mit $df(g(y))^{-1}$ liefert die Formel. Wir haben $df(x)$ bereits berechnet. Im Punkt $(1,1)$ gilt $g(1,1) = f|_U^{-1}(1,1) = (0,0)$, also finden wir

$$dg(1,1) = df(0,0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.8. Kugelkoordinaten.

(a) Das Bild der Ebene $r = r_0$ ist die Kugeloberfläche mit Radius $|r_0|$ um den Ursprung. Das Bild der Ebene $\phi = \phi_0$ ist die Ebene in $\mathbb{R}^3$ aufgespannt durch die z-Achse und den Punkt $(\cos\phi_0, \sin\phi_0, 0)$, also mit Winkel ϕ_0 modulo π zur x-Achse. Das Bild der Ebene $\theta = \theta_0$ ist der Doppelkegel um die z-Achse mit Spitze im Ursprung und Winkel θ_0 modulo $\frac{\pi}{2}$ zur xy-Ebene.

Das Bild der Gerade $(\phi, \theta) = (\phi_0, \theta_0)$ ist die Gerade durch den Ursprung und den Punkt $(\cos\phi_0 \cos\theta_0, \sin\phi_0 \cos\theta_0, \sin\theta_0)$. Das Bild der Gerade $(r, \theta) = (r_0, \theta_0)$ ist der Kreis parallel zur xy-Ebene mit Mittelpunkt in $(0, 0, r_0 \sin\theta_0)$ auf der z-Achse und Radius $|r_0||\cos\theta_0|$. Das Bild der Gerade $(r, \phi) = (r_0, \phi_0)$ ist der Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius $|r_0|$, welcher in der Ebene aufgespannt durch die z-Achse und den Punkt $(\cos\phi_0, \sin\phi_0, 0)$ liegt.

(b) Wir zeigen, dass f surjektiv ist. Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Wir finden dazu $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3$ mit $f(r, \phi, \theta) = (x, y, z)$. Wir nehmen zuerst an, dass $x > 0$. In diesem Fall setzen wir

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \arctan\Big(\frac{y}{x}\Big), \quad \theta = \arcsin\Big(\frac{z}{r}\Big). \tag{2}$$

Dann gilt

$$\cos(\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin(\phi) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos(\theta) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}, \quad \sin(\theta) = \frac{z}{r}, \tag{3}$$

und somit

$$f(r, \phi, \theta) = (x, y, z).$$

Sei nun $x < 0$. Dann wählen wir r, θ wie in (2) aber setzen $\phi = \pi + \arctan(\frac{y}{x})$. Man kann kontrollieren, dass wiederum (3) gilt und somit

$$f(r, \phi, \theta) = (x, y, z).$$

Falls $x = 0$ aber $y \neq 0$, setzen wir $\phi = \operatorname{sgn}(y)\frac{\pi}{2}$ mit r, θ wie in (2) und finden wieder (3) und somit $f(r, \phi, \theta) = (x, y, z)$. Falls $x = 0$ und $y = 0$ aber $z \neq 0$, dann wählen wir $\phi = 0$ und $\theta = \operatorname{sgn}(z)\frac{\pi}{2}$ mit r wie in (2). Für $x = y = z = 0$ wählen wir $\phi = \theta = 0$ und $r = 0$. In beiden Fällen finden wir $f(r, \phi, \theta) = (x, y, z)$. Wir haben nun alle Fälle behandelt, somit ist jedes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ im Bild von f, also f surjektiv.

Um zu sehen, dass f nicht injektiv ist, kann man zum Beispiel bemerken, dass die ganze Ebene $r = 0$ auf den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ abgebildet wird, also

$$f(0, \phi, \theta) = (0, 0, 0), \quad \forall (\phi, \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

(c) Seien $(r_1, \phi_1, \theta_1) \in U$ und $(r_2, \phi_2, \theta_2) \in U$ zwei Punkte, sodass

$$f(r_1, \phi_1, \theta_1) = f(r_2, \phi_2, \theta_2) = (x, y, z)$$

für irgend ein $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Wir zeigen, dass $(r_1, \phi_1, \theta_1) = (r_2, \phi_2, \theta_2)$. Aus der Formel für f folgt

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r_2^2.$$

Da $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ gilt also $r_1 = r_2$. Daraus folgt nun

$$\sin(\theta_1) = \frac{z}{r_1} = \frac{z}{r_1} = \sin(\theta_2).$$

(Man beachte $r \neq 0$.) Da $\theta_1, \theta_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und der Sinus injektiv auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist, folgt $\theta_1 = \theta_2$. Schliesslich folgt aus $\theta_1 = \theta_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dass $\cos(\theta_1) \neq 0$ und wir finden

$$\begin{aligned}
\cos(\phi_1) &= \frac{x}{r_1 \cos(\theta_1)} = \frac{x}{r_2 \cos(\theta_2)} = \cos(\phi_2), \\
\sin(\phi_1) &= \frac{y}{r_1 \cos(\theta_1)} = \frac{y}{r_2 \cos(\theta_2)} = \sin(\phi_2).
\end{aligned}$$

Da $\phi_1, \phi_2 \in (-\pi, \pi)$, folgt aus $\cos(\phi_1) = \cos(\phi_2)$, dass $\phi_1 = \pm\phi_2$. Verwenden wir zusätzlich $\sin(\phi_1) = \sin(\phi_2)$, so finden wir $\phi_1 = \phi_2$. Wir haben also gezeigt, dass

$$(r_1, \phi_1, \theta_1) = (r_2, \phi_2, \theta_2).$$

Somit ist die Einschränkung von f auf U injektiv.

(d) Man bemerke, dass die z-Achse durch das Bild von $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ gegeben ist. Da diese Werte von θ nicht in U enthalten sind, ist die z-Achse nicht im Bild $f(U)$. Ausserdem kann (x, y) für $\phi \in (-\pi, \pi)$ keine Werte der Form $x < 0$, $y = 0$ annehmen. Diese Werte würden im Bild von $\phi = \pm\pi$ liegen. Zusammengefasst ist das Bild von U unter f also

$$V = f(U) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \,|\, x \le 0,\ z \in \mathbb{R}\}.$$

(e) Da der Sinus und Cosinus glatt sind, ist auch f als Produkt von glatten Funktionen glatt. Für die Umkehrabbildung verwenden wir den Umkehrsatz. Dazu berechnen wir die Ableitung (Jacobi-Matrix) von f:

$$df(r, \phi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\cos\theta & -r\cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der Jacobi-Matrix vereinfacht sich zu

$$\det\Big(df(r, \phi, \theta)\Big) = r^2\cos(\theta)$$

Da $r \in (0, \infty)$ und $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ist $r^2\cos(\theta) > 0$ für alle $(r, \phi, \theta) \in U$, also ist die Jacobi-Determinante positiv und die Jacobi-Matrix ist auf ganz U invertierbar. Laut dem Umkehrsatz gibt es zu jedem Punkt (r_0, ϕ_0, θ_0) in U eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ und eine lokale Umkehrabbildung $f|_{U_0}^{-1} : f(U_0) \to U_0$, welche glatt ist (da f glatt ist). Wir wissen aber aus den vorherigen Teilaufgaben, dass die Abbildung $f : U \to V = f(U)$ injektiv und surjektiv, also bijektiv ist. Somit besitzt f auf U sogar eine globale Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$. Da die Umkehrabbildung eindeutig ist, muss f^{-1} in $f(U_0)$ mit $f|_{U_0}^{-1}$ übereinstimmen. Dies zeigt, dass f^{-1} überall in V glatt ist.

(f) Zur Erinnerung: Der Arkustangens ist eine bijektive Abbildung von $(-\infty, \infty)$ nach $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Da aber der Winkel ϕ Werte in $(-\pi, \pi)$ annehmen kann, müssen wir für die Umkehrabbildung den Arkustangens etwas verallgemeinern, vergleiche dazu die zweite Teilaufgabe. Wir definieren die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, x \le 0,\ y = 0\Big\} \to (-\pi, \pi),$$
$$g(x, y) = \begin{cases} \arctan\Big(\frac{y}{x}\Big), & \text{für} \quad x > 0 \\ \arctan\Big(\frac{y}{x}\Big) + \pi, & \text{für} \quad x < 0,\ y > 0 \\ \arctan\Big(\frac{y}{x}\Big) - \pi, & \text{für} \quad x < 0,\ y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Dann ist die Umkehrabbildung von $f: U \to V$ gegeben durch

$$f^{-1}: V \to U, \quad f^{-1}(x,y,z) = \Big(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\, g(x,y),\, \arcsin\Big(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big)\Big)$$

Bemerkung: *Die Funktion g wird in Programmiersprachen oft als "atan2" bezeichnet, da es sozusagen ein Arkustangens mit zwei Argumenten ist. Eingeschränkt auf $x > 0$ nimmt die Umkehrabbildung die einfachere Form*

$$\begin{gathered} f^{-1}|_{\{x>0\}} : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\} \to (0,\infty) \times (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \times (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \\ f^{-1}|_{\{x>0\}}(x,y,z) = \Big(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\, \arctan\Big(\frac{y}{x}\Big),\, \arcsin\Big(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big)\Big). \end{gathered}$$

Man bemerke übrigens auch, dass $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \|(x,y,z)\|$ einfach die euklidische Norm des Vektors $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ist.