4.1. Nichtlineare Gleichung.

(a) Wir verwenden den Satz von der impliziten Funktion. (Siehe die Vorlesung.) Dazu betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin(x + y) + y$$

und den Punkt $(x_0, y_0) := (0, 0)$. Diese Funktion ist glatt, also $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Des Weiteren gilt $f(0, 0) = 0$. Die Ableitung von f nach y ist

$$\partial_y f(x, y) = \cos(x + y) + 1,$$

also gilt

$$\partial_y f(0, 0) = 2.$$

Dies ist eine invertierbare 1×1 Matrix. Somit sind alle Bedingungen für den Satz von der impliziten Funktion erfüllt und der Satz liefert offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in U$ und $0 \in V$ und eine Funktion $g : U \to V$ mit $g(0) = 0$, sodass für alle $x \in U$ und $y \in V$ gilt

$$f(x, y) = 0 \iff y = g(x). \tag{1}$$

Da jede offene Menge um 0 einen Ball um 0 enthält, können wir $b > 0$ wählen, sodass $(-b, b) \subseteq V$. Da das Urbild von $(-b, b)$ unter f den Punkt $f^{-1}(0) = 0$ enthält und als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung offen ist, können wir $a > 0$ wählen, sodass $(-a, a) \subseteq g^{-1}((-b, b)) \subseteq U$. Nun existiert laut (1) für jedes $x \in (-a, a)$ die eindeutige Lösung $y = g(x) \in (-b, b)$ zur Gleichung $f(x, y) = 0$. Da die ursprüngliche Funktion f glatt ist, ist auch die implizite Funktion g glatt.

(b) Laut dem Satz von der impliziten Funktion ist die Ableitung der Funktion g gegeben durch

$$g'(x) = -\frac{\partial_x f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))}.$$

Wir berechnen

$$\partial_x f(x, y) = \cos(x + y).$$

Somit finden wir

$$g'(0) = -\frac{\partial_x f(0, 0)}{\partial_y f(0, 0)} = -\frac{1}{2}.$$

4.2. Lösung einer polynomialen Gleichung

(a) Das Vorgehen hier ist genau gleich wie in der Aufgabe 4.1. Wir verwenden den Satz von der impliziten Funktion. Hier ist $n = 2$, $p = 1$ und $(x_0, y_0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Die Funktion f ist als Polynom glatt, also $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, und $f(0, 0) = 0$. Die Ableitung von f nach y ist

$$\partial_y f(x, y) = 1 + 5y^4,$$

also gilt

$$\partial_y f(0, 0) = 1.$$

Die Ableitung nach y ist nicht Null im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$, also invertierbar als lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Somit sind alle Bedingungen für den Satz von der impliziten Funktion erfüllt und der Satz liefert offene Umgebungen U_0 von $x_0 = 0$ und V_0 von $y_0 = 0$ und eine Funktion $g \in C^\infty(U_0, V_0)$ mit $g(0) = 0$, sodass

$$f^{-1}(0) \cap U_0 \times V_0 = \Big\{(x, g(x)) \,|\, x \in U_0\Big\}$$

Wir können leicht arrangieren, dass dies auch für Intervalle gilt. Nämlich wählen wir ein offenes Intervall $V \subseteq V_0$ und ein offenes Intervall $U \subseteq g^{-1}(V) \subset g^{-1}(V_0) = U_0$. Wir bemerken, dass die Einschränkung $g|_U$ in $C^\infty(U, V)$ liegt (U wurde so gewählt, dass es unter g nach V abgebildet wird). Dann gilt auch

$$f^{-1}(0) \cap U \times V = \Big\{(x, g(x)) \,|\, x \in U\Big\}.$$

Diese Gleichung besagt, dass für jedes $x \in U$, der Punkt $(x, y) = (x, g(x))$ in der Lösungsmenge $f^{-1}(0)$ liegt, also löst $y = g(x)$ die Gleichung $f(x, y) = 0$. Des Weiteren besagt die Gleichung, dass alle Punkte der Lösungsmenge $f^{-1}(0)$ in $U \times V$ von dieser Form sind. Also für gegebenes x ist $y = g(x)$ die einzige Lösung in V von $f(x, y) = 0$.

(b) Es gilt

$$g'(x) = -\frac{\partial_x f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))}.$$

Wir berechnen

$$\partial_x f(x, y) = 1 + 6x^5.$$

Somit finden wir

$$g'(0) = -\frac{\partial_x f(0, 0)}{\partial_y f(0, 0)} = -1.$$

4.3. Einfache Eigenwerte hängen glatt von den Matrix-Einträgen ab.

Wir verwenden den Satz von der impliziten Funktion. Dazu definieren wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(A, \lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - A).$$

Die Funktion f ist einfach das charakteristische Polynom von A ausgewertet in λ, wobei wir das charakteristische Polynom als Funktion auf $\mathbb{R}^{n^2+1}$ betrachten, das sowohl von den Matrix-Einträgen von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und von $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängt. Die Determinante oben ist ein Polynom in den Einträgen der Matrix $\lambda\mathbb{1} - A$, also ist f ein Polynom in den Einträgen von A und in λ und somit eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}^{n^2+1}$. Sei nun A_0, λ_0 und $p(\lambda) = f(A_0, \lambda)$ wie in der Aufgabenstellung. Da λ_0 eine einfache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist, gibt es ein Polynom $q(\lambda)$, sodass

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)q(\lambda), \quad q(\lambda_0) \neq 0.$$

Die partielle Ableitung von f nach λ ausgewertet in $A = A_0$ ergibt also

$$\partial_\lambda f(A_0, \lambda) = p'(\lambda) = q(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)q'(\lambda).$$

Somit finden wir

$$\partial_\lambda f(A_0, \lambda_0) = q(\lambda_0) \neq 0.$$

Die Bedingungen für den Satz von der impliziten Funktion sind also erfüllt und es gibt offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ von A_0 und $V \subset \mathbb{R}$ von λ_0 und eine glatte Funktion $g : U \to V$ mit $g(A_0) = \lambda_0$, sodass für alle $A \in U$ und $\lambda \in V$ gilt

$$f(A, \lambda) = 0 \iff \lambda = g(A). \tag{2}$$

Die Lösung $\lambda = g(A) \in V$ erfüllt $\det(\lambda\mathbb{1} - A) = 0$, ist also eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A und somit ein Eigenwert. Laut (2) ist $\lambda = g(A)$ die einzige Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A in der Umgebung V von λ_0. Da $g \in C^\infty(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R})$, hängt dieser Eigenwert glatt von den Einträgen der Matrix A ab.

4.4. Zweite Ableitung einer impliziten Funktion

(a) Der Satz von der impliziten Funktion liefert offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}$ von x_0 und $V \subseteq \mathbb{R}$ von y_0 und eine Funktion $g \in C^2(U, V)$ mit $g(x_0) = y_0$, sodass $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$. Definieren wir also die Funktion $h : U \to \mathbb{R}^2$ durch $h(x) = f(x, g(x))$, so gilt $h(x) = 0$ für alle $x \in U$. Leiten wir beide Seiten dieser Gleichung nach x ab und verwenden die Kettenregel, so finden wir

$$h'(x) = \partial_x f(x, g(x)) + \partial_y f(x, g(x))g'(x) = 0.$$

Dies liefert die schon bekannte Formel

$$g'(x) = -\frac{\partial_x f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))}. \tag{3}$$

Man bemerke, dass die Voraussetung für den Satz von der impliziten Funktion gerade $\partial_y f(x_0, g(x_0)) \neq 0$ war, womit auch $\partial_y f(x, g(x)) \neq 0$ für x in einer Umgebung von x_0 gilt und der Bruch in der Formel oben Sinn ergibt.

Wir berechnen nun die zweite Ableitung von h mit Hilfe der Kettenregel. Es gilt

$$h''(x) = \partial_x^2 f(x, g(x)) + 2\partial_y\partial_x f(x, g(x))g'(x) + \partial_y^2 f(x, g(x))g'(x)^2 + \partial_y f(x, g(x))g''(x) = 0.$$

Aufgelöst nach $g''(x)$ finden wir

$$g''(x) = -\frac{\partial_x^2 f(x, g(x)) + 2\partial_y\partial_x f(x, g(x))g'(x) + \partial_y^2 f(x, g(x))g'(x)^2}{\partial_y f(x, g(x))}.$$

Setzen wir nun noch die Formel (3) für $g'(x)$ in diese Gleichung ein, so erhalten wir schliesslich

$$g''(x) = -\frac{\partial_x^2 f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))} + 2\frac{\partial_y\partial_x f(x, g(x))\partial_x f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))^2} - \frac{\partial_y^2 f(x, g(x))\partial_x f(x, g(x))^2}{\partial_y f(x, g(x))^3}$$

(b) Man bemerke, dass die Formel oben im Punkt x_0 ausgewertet das Folgende ergibt:

$$g''(x_0) = -\frac{\partial_x^2 f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)} + 2\frac{\partial_y\partial_x f(x_0, y_0)\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)^2} - \frac{\partial_y^2 f(x_0, y_0)\partial_x f(x_0, y_0)^2}{\partial_y f(x_0, y_0)^3}.$$

Für die Funktion f aus der Aufgabe 4.1 gilt

$$\begin{aligned}
&\partial_x f(x, y) = \cos(x + y), \quad \partial_y f(x, y) = \cos(x + y) + 1,\\
&\partial_x^2 f(x, y) = -\sin(x + y), \quad \partial_x\partial_y f(x, y) = -\sin(x + y), \quad \partial_y^2 f(x, y) = -\sin(x + y).
\end{aligned}$$

Ausgewertet in $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ finden wir

$$\partial_x f(0, 0) = 1, \quad \partial_y f(0, 0) = 2, \quad \partial_x^2 f(0, 0) = 0, \quad \partial_x\partial_y f(0, 0) = 0, \quad \partial_y^2 f(0, 0) = 0.$$

Schliesslich bekommen wir für die implizite Funktion

$$g''(0) = 0.$$

4.5. Kreis ist eine Untermannigfaltigkeit

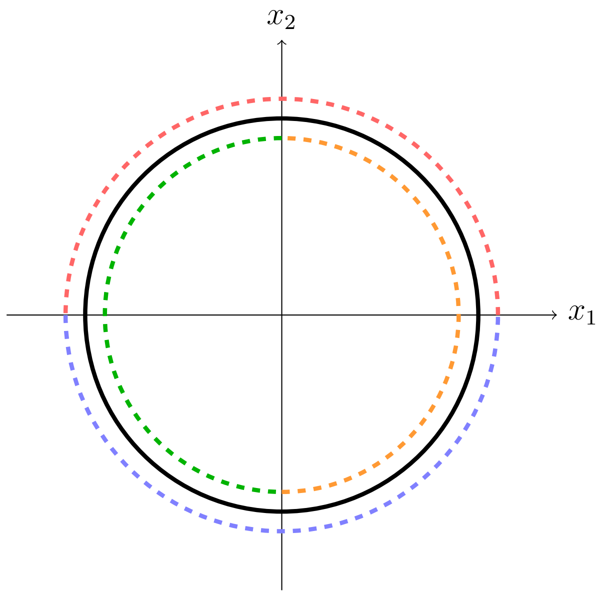
Wir betrachten die folgenden vier offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} U_N &= \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 > 0\Big\}, \quad & U_S &= \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 < 0\Big\}, \\ U_E &= \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 > 0\Big\}, \quad & U_W &= \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 < 0\Big\}. \end{aligned}$$

Wir können den Einheitskreis mit den vier Teilmengen

$$S^1 \cap U_N, \quad S^1 \cap U_S, \quad S^1 \cap U_E, \quad S^1 \cap U_W$$

überdecken und werden jeweils in diesen Teilmengen die Definition einer Untermannigfaltigkeit überprüfen, also S^1 dort als Graph einer Funktion darstellen. Diese Teilmengen sind in der folgenden Abbildung dargestellt: in Schwarz der Einheitskreis und farbig gestrichelt jeweils der entsprechende Bereich des Einheitskreises gekennzeichnet.



Für $x \in S^1 \cap U_N$ (dies entspricht der in rot dargestellten Teilmenge) gilt $x_2 > 0$ und $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Wir können diese Gleichung nach x_2 auflösen, also $x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$, wobei wir wegen $x_2 > 0$ die positive Wurzel nehmen. Wir definieren nun die Abbildung

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(y) = \sqrt{1 - y^2}$$

und bemerken, dass diese Funktion glatt ist, also $f \in C^\infty((-1,1),\mathbb{R})$ (da $1-y^2>0$ für alle $y \in (-1,1)$). Nun können wir $S^1 \cap U_N$ als Graph dieser Funktion schreiben, also

$$S^1 \cap U_N = \mathrm{gr}(f) = \Big\{\Big(x_1, \sqrt{1-x_1^2}\Big) \,|\, x_1 \in (-1,1)\Big\}.$$

Laut der Definition einer Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums ist somit S^1 um jeden Punkt $x \in S^1 \cap U_N$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension 1. (Hier mussten wir keine Koordinaten permutieren, also als Permutation wurde die Identität verwenden.)

Für $x \in S^1 \cap U_S$ (in blau) gilt $x_2 < 0$ und $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Lösen wir die Gleichung nach x_2 auf, finden wir nun $x_2 = -\sqrt{1-x_1^2}$. Wir definieren die Abbildung

$$g : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad g(y) = -\sqrt{1-y^2}.$$

Es gilt wieder $g \in C^\infty((-1,1),\mathbb{R})$ und wir können $S^1 \cap U_N$ als Graph dieser glatten Funktion schreiben:

$$S^1 \cap U_S = \mathrm{gr}(g) = \Big\{\Big(x_1, -\sqrt{1-x_1^2}\Big) \,|\, x_1 \in (-1,1)\Big\}.$$

Für $x \in S^1 \cap U_E$ (in orange) gilt $x_1 > 0$ und $x_1^2 + x_2^2 = 1$, also $x_1 = \sqrt{1-x_2^2}$. Wir bemerken, dass die Teilmenge $S^1 \cap U_E$ nicht direkt als Graph geschrieben werden kann, also es gibt keine Funktion h, sodass $(x_1,x_2) = (x_1, h(x_1))$ gilt für alle $(x_1,x_2) \in S^1 \cap U_E$. Aber wenn wir die beiden Koordinaten vertauschen, dann kann die Teilmenge als Graph dargestellt werden (d.h. wir schreiben x_1 als Funktion von x_2). Wir wenden also die folgende Permutation an

$$\sigma : \{1,2\} \to \{1,2\}, \quad \sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 1.$$

Dann gilt

$$\Big\{(x_2,x_1) \,|\, (x_1,x_2) \in S^1 \cap U_S\Big\} = \mathrm{gr}(f) = \Big\{\Big(x_2, \sqrt{1-x_2^2}\Big) \,|\, x_2 \in (-1,1)\Big\}.$$

Ähnliches gilt für $S^1 \cap U_W$ (in grün). Hier haben wir $x_1 < 0$ und $x_1^2 + x_2^2 = 1$, also $x_1 = -\sqrt{1-x_2^2} = g(x_2)$. Wir wenden wieder die Permutation σ an und schreiben

$$\Big\{(x_2,x_1) \,|\, (x_1,x_2) \in S^1 \cap U_S\Big\} = \mathrm{gr}(g) = \Big\{\Big(x_2, -\sqrt{1-x_2^2}\Big) \,|\, x_2 \in (-1,1)\Big\}.$$

Wir haben nun gezeigt, dass S^1 um jeden Punkt eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ der Dimension 1 ist.

4.6. Immersion, Einbettung

(a) Wir bemerken, dass f glatt ist. Die Ableitung von f in einem Punkt $y \in \mathbb{R}$ lautet

$$df(y) = \begin{pmatrix} -\sin(y) \\ \cos(y) \end{pmatrix}.$$

Da der Sinus und Cosinus nie gleichzeitig verschwinden, also für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(y) \neq 0$ oder $\cos(y) \neq 0$, ist die lineare Abbildung $df(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ für jedes $y \in \mathbb{R}$ injektiv. Somit ist f eine (glatte) Immersion.

(b) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist keine Einbettung, da f nicht injektiv ist. Es gilt nämlich für jedes $y \in \mathbb{R}$: $f(y) = f(y + 2\pi)$.

(c) Zum Beispiel ist die Einschränkung von f auf $I = (0, 2\pi)$ eine (glatte) Einbettung. Die Abbildung $f|_I : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ ist natürlich immernoch eine Immersion und ist nun injektiv. Tatsächlich, falls $f(y_1) = f(y_2)$ für $y_1, y_2 \in (0, 2\pi)$, dann gilt $\cos(y_1) = \cos(y_2)$ und $\sin(y_1) = \sin(y_2)$. Aus der ersten Gleichung folgt $y_1 = y_2$ oder $y_1 = 2\pi - y_2$ und aus der zweiten Gleichung folgt dann $y_1 = y_2$. Die Umkehrabbildung auf dem Bild von $f|_I$, können wir z.B. schreiben als

$$f|_I^{-1} : f(I) \to (0, 2\pi), \quad f|_I^{-1}(x, y) = \begin{cases} \arccos(x) & \text{für} \quad y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos(x) & \text{für} \quad y \leq 0. \end{cases}$$

Der Arcuscosinus ist stetig auf $(-1, 1)$. Der einzige Punkt in $f(I)$ mit $y = 0$ ist $(-1, 0)$. Da $\arccos(-1) = 2\pi - \arccos(-1) = \pi$, stimmen die beiden Fälle dort überein, also ist $f|_I^{-1}$ stetig und $f|_I$ somit eine Einbettung. Übrigens ist die Einschränkung von f auf jedes offene Interval $I \subseteq \mathbb{R}$ der Länge $|I| \leq 2\pi$ eine Einbettung.

4.7. Die Inverse stereographische Projektion ist eine Einbettung.

(a) Die stereographische Projektion ist gegeben durch

$$\varphi : S^{n-1} \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{1 - x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{4}$$

Wir leiten die Formel aus geometrischen Überlegungen her. Das Bild von $x \in S^{n-1} \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\}$ unter φ ist der Punkt, wo die Gerade durch $(0, \ldots, 0, 1)$ und x die Ebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ schneidet. (Siehe Abbildung 1.) Diese Gerade ist gegeben durch

$$\Big\{(tx_1, \ldots, tx_{n-1}, 1 + t(x_n - 1)) \,\big|\, t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Wir suchen also $t \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ (für gegebenes x), sodass

$$(tx_1, \ldots, tx_{n-1}, 1 + t(x_n - 1)) = (y_1, \ldots, y_{n-1}, 0).$$

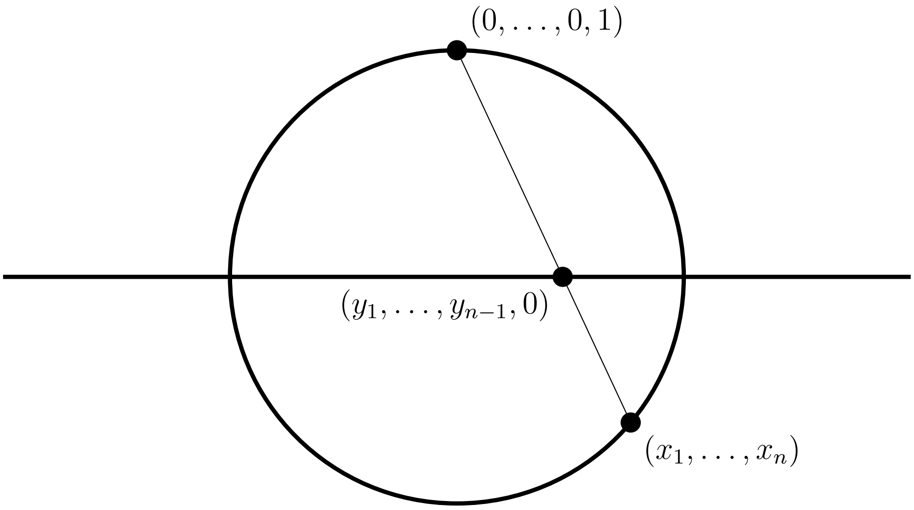


Abbildung 1: Die stereographische Projektion und ihre Inverse.

Die Lösung der n-ten Gleichung ist gegeben durch $t = (1 - x_n)^{-1}$ und aus den restlichen Gleichungen folgt dann

$$y = \frac{1}{1 - x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Das zeigt (4).

(b) Die inverse stereographische Projektion ψ bildet den Punkt $y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ auf den Punkt $x = (x_1, \dots, x_n)$ ab, wo die Gerade durch $(0, \dots, 0, 1)$ und $(y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$ die Menge $S^{n-1} \setminus \Big\{\Big(0, \dots, 0, 1\Big)\Big\}$ schneidet. (Siehe Abbildung 1.) Die Gerade durch die Punkte $(0, \dots, 0, 1)$ und $(y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$ besteht aus den Punkten

$$(0, \dots, 0, 1) + t\Big((y_1, \dots, y_{n-1}, 0) - (0, \dots, 0, 1)\Big), \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R},$$

also ist die Gerade gegeben durch

$$G = \Big\{(ty_1, \dots, ty_{n-1}, 1 - t) \,|\, t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Die Schnittmenge $G \cap S^{n-1}$ besteht aus allen Punkten $x \in G$ welche $\|x\|^2 = 1$ erfüllen. Es gibt zwei Schnittpunkte, nämlich den ursprünglichen Punkt $(0, \dots, 0, 1)$ und den gesuchten Punkt $x \in S^{n-1} \setminus \Big\{\Big(0, \dots, 0, 1\Big)\Big\}$, welcher als Bild $\psi(y)$ definiert wird. Die quadrierte euklidische Norm eines Punktes in G ist gegeben durch

$$\|(ty_1, \dots, ty_{n-1}, 1-t)\|^2 = t^2 \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 + (1-t)^2 = t^2\|y\|^2 + (1-t)^2 = (\|y\|^2 + 1)t^2 - 2t + 1,$$

wobei die Norm auf der rechten Seite die euklidische Norm in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist. Um $x = \psi(y)$ zu finden, setzen wir den Ausdruck oben gleich 1 und lösen nach t auf. Dies ergibt

$$(\|y\|^2 + 1)t^2 - 2t = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t = 0 \quad \text{oder} \quad t = \frac{2}{\|y\|^2 + 1}.$$

Die Lösung $t = 0$ entspricht dem Punkt $(0, \ldots, 0, 1)$. Die andere Lösung entspricht unserem gesuchten Punkt:

$$x = \Big(\frac{2y_1}{\|y\|^2+1}, \ldots, \frac{2y_{n-1}}{\|y\|^2+1}, 1 - \frac{2}{\|y\|^2+1}\Big) = \Big(\frac{2y_1}{\|y\|^2+1}, \ldots, \frac{2y_{n-1}}{\|y\|^2+1}, \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}\Big)$$

Wir können also die inverse stereographische Projektion wie folgt schreiben:

$$\psi : \mathbb{R}^{n-1} \to S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \psi(y) = \frac{1}{\|y\|^2+1}\Big(2y, \|y\|^2 - 1\Big).$$

(c) Die Abbildung ψ ist glatt. Wir zeigen, dass ψ eine Immersion ist, also, dass die Ableitung überall injektiv ist. Sei $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ beliebig. Die Ableitung von ψ im Punkt y ist eine lineare Abbildung

$$d\psi(y) : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n.$$

Wir müssen zeigen, dass diese lineare Abbildung injektiv ist, also wenn $d\psi(y) \cdot v = 0$ für ein $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ dann gilt $v = 0$. In Matrix-Darstellung sind die Einträge der Ableitung gegeben durch

$$d\psi(y)_{jk} = \frac{\partial \psi^j(y)}{\partial y_k}.$$

Für $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ finden wir

$$\frac{\partial \psi^j(y)}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k}\Big(\frac{2y_k}{\|y\|^2+1}\Big) = \frac{2\delta_{jk}}{\|y\|^2+1} - \frac{4y_j y_k}{(\|y\|^2+1)^2},$$

wobei $\delta_{jk} = 1$ falls $j = k$ und $\delta_{jk} = 0$ falls $j \neq k$. Für $j = n$ finden wir

$$\frac{\partial \psi^n(y)}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k}\Big(\frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2+1}\Big) = \frac{4y_k}{(\|y\|^2+1)^2}.$$

Das Bild $d\psi(y) \cdot v \in \mathbb{R}^n$ von $v = (v_1, \ldots, v_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist in Komponenten also gegeben durch

$$(d\psi(y) \cdot v)_j = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2\delta_{jk} v_k}{\|y\|^2+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4y_j y_k v_k}{(\|y\|^2+1)^2} = \frac{2}{\|y\|^2+1} v_j - \frac{4\langle y, v\rangle}{(\|y\|^2+1)^2} y_j,$$

wenn $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ und für $j = n$:

$$(d\psi(y) \cdot v)_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4y_k v_k}{(\|y\|^2+1)^2} = \frac{4\langle y, v\rangle}{(\|y\|^2+1)^2},$$

wobei $\langle y, v\rangle$ das Skalarprodukt von y und v bezeichnet. Falls $d\psi(y) \cdot v = 0$ gilt, dann folgt aus den ersten $n-1$ Komponenten, dass v parallel zu y ist, also $v = \lambda y$ für irgendein $\lambda \in \mathbb{R}$. Wenn $y = 0$ impliziert dies schon $v = 0$. Wenn $y \neq 0$, dann impliziert die n-te Komponente, dass $\frac{4\|y\|^2}{\|y\|^2+1}\lambda = 0$, also $\lambda = 0$ und somit $v = 0$. Dies zeigt, dass $d\psi(y)$ injektiv ist.

Wir haben gezeigt, dass ψ eine glatte Immersion ist. Um zu schliessen, dass ψ eine Einbettung ist müssen wir noch die Injektivität von ψ und die Stetigkeit der Umkehrabbildung zeigen. Dies folgt aus der Tatsache $\psi = \varphi^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \to S^{n-1} \setminus \Big\{\Big(0, \ldots, 0, 1\Big)\Big\}$ und aus der expliziten Formel für die stereographische Projektion in Teilaufgabe (a).