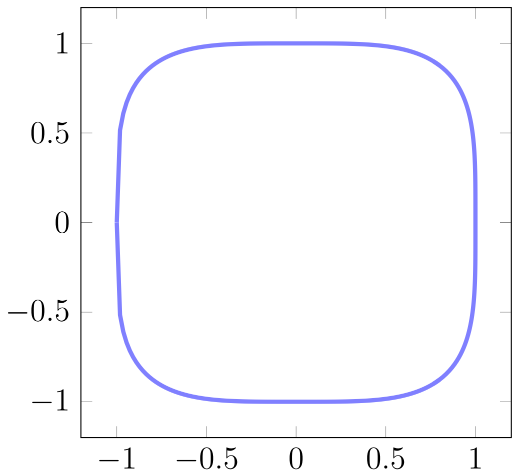
5.1. Kurve vierter Ordnung, die eine Untermannigfaltigkeit ist.



Wir verwenden den Satz vom regulären Wert. Dazu definieren wir die glatte Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4.$$

Wir können die Menge M als Urbild unter g schreiben:

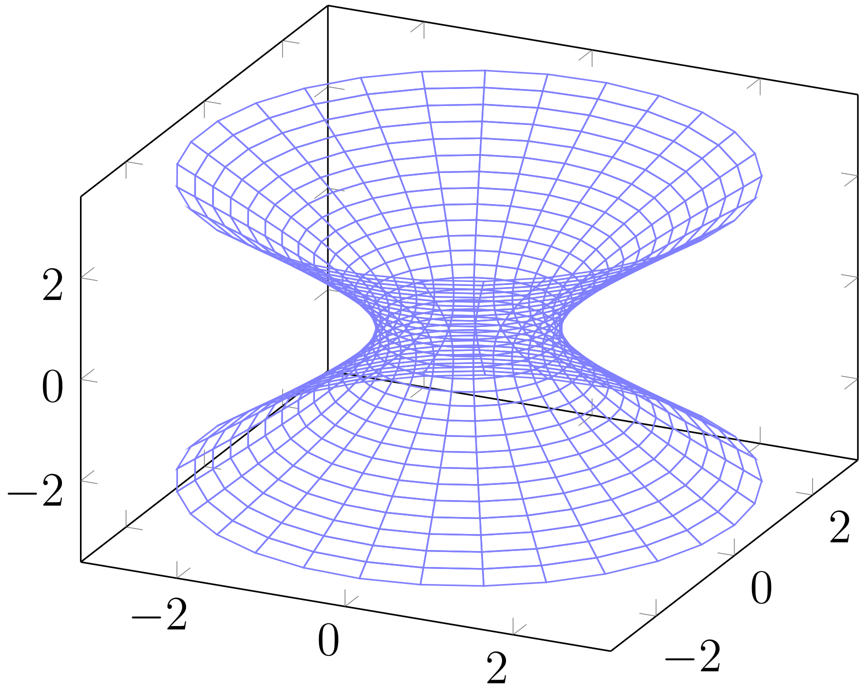
$$M = g^{-1}(1).$$

Um den Satz vom regulären Wert anzuwenden, müssen wir zeigen, dass die Ableitung von g in jedem Punkt von $M = g^{-1}(1)$ surjektiv ist. Die Ableitung lautet

$$dg(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 & 4x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Diese lineare Abbildung hat für jeden Punkt $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ Rang 1, bildet also $\mathbb{R}^2$ surjektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Da der Punkt $(0, 0) \notin g^{-1}(1)$, ist $dg(x)$ für alle $x \in g^{-1}(1)$ surjektiv und 1 somit ein regulärer Wert von g. Aus dem Satz vom regulären Wert folgt, dass $M = g^{-1}(1)$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $2 - 1 = 1$ ist.

5.2. Hyperboloid ist eine Untermannigfaltigkeit



Wir verwenden wieder den Satz vom regulären Wert. Dazu definieren wir die Funktion:

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Wir bemerken, dass g glatt ist und

$$M = g^{-1}(1).$$

Die Ableitung lautet

$$dg(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & -2x_3 \end{pmatrix}.$$

Diese lineare Abbildung hat Rang 1 ausser im Punkt $(0, 0, 0)$. $dg(x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist also surjektiv für alle $x \neq 0$. Da $(0, 0, 0) \notin g^{-1}(1)$, folgt das 1 ein regulärer Wert von g ist und $M = g^{-1}(1)$ somit eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ der Dimension $3 - 1 = 2$.

5.3. Tangentialräume einiger Untermannigfaltigkeiten

Wir bemerken, dass die Untermannigfaltigkeiten in der Aufgabenstellung alle als Lösungsmenge einer Gleichung dargestellt sind. Um den Tangentialraum zu beschreiben, können wir also den dritten Teil eines Satzes aus der Vorlesung (Charakterisierung des Tangentialraumes) verwenden. Dieser besagt, dass für eine Untermannigfaltigkeit der Form $M = g^{-1}(c)$ der Tangentialraum in jedem Punkt $x \in M$ durch den Kern der Ableitung von g gegeben ist, also $T_xM = \ker(dg(x))$.

(a) Es gilt $M = g^{-1}(1)$, wobei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = x_1 x_2.$$

Die Ableitung in einem Punkt $x \in M$ ist

$$dg(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Der Tangentialraum im Punkt x ist

$$T_xM = \ker(dg(x)) = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 v_1 + x_1 v_2 = 0\} = \left\{t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{x_1^2} \end{pmatrix} \,|\, t \in \mathbb{R}\right\},$$

wobei wir verwendet haben, dass für $x \in M$ gilt $x_2 = \frac{1}{x_1}$, also $v_2 = -\frac{x_2}{x_1} v_1 = -\frac{1}{x_1^2} v_1$.

(b) Wieder gilt $M = g^{-1}(1)$, wobei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4.$$

Wir berechnen die Ableitung in einem Punkt $x \in M$:

$$dg(x_1, x_2) = 4 \begin{pmatrix} x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Somit ist der Tangentialraum im Punkt x:

$$T_xM = \ker(dg(x)) = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^3 v_1 + x_2^3 v_2 = 0\}.$$

(c) Es gilt $M = g^{-1}(1)$, wobei

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

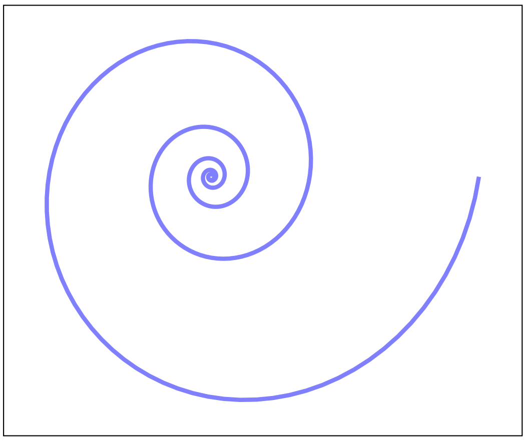
Die Ableitung im Punkt $x \in M$ ist

$$dg(x_1, x_2, x_2) = 2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix}.$$

Der Tangentialraum im Punkt x ist somit

$$T_xM = \ker(dg(x)) = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 v_1 + x_2 v_2 - x_3 v_3 = 0\}.$$

5.4. Tangentialräume an die logarithmische Spirale, Tangentialabbildung

(a) 

(b) Die Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ist hier als Parametrisierung gegeben. Betrachten wir die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \psi(t) = e^t(\cos(t), \sin(t)),$$

so ist M das Bild von ψ, also $M = \psi(\mathbb{R})$. Um zu zeigen, dass M eine Untermannigfaltigkeit ist, verwenden wir einen Satz aus der Vorlesung ("Einbettungssatz"). Wir zeigen, dass ψ eine glatte Einbettung ist. Aus dem Einbettungssatz folgt dann, dass $M = \psi(\mathbb{R})$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension 1 ist.

ψ ist offensichtlich glatt. Die Ableitung in einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ lautet

$$d\psi(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine injektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$ ausser

$$\cos(t) - \sin(t) = 0, \quad \cos(t) + \sin(t) = 0,$$

also $\cos(t) = \sin(t) = 0$, was unmöglich ist. Somit ist $d\psi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ injektiv, also ψ eine Immersion. Des Weiteren ist ψ selbst injektiv. Tatsächlich impliziert $(x, y) = \psi(t) = \psi(s)$, dass $x^2 + y^2 = e^{2t} = e^{2s}$, also $t = s$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\varphi : M \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2),$$

was stetig auf M ist, da $(0, 0) \notin M$. Somit ist $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Einbettung.

Laut dem zweiten Teil eines Satzes aus der Vorlesung (Charakterisierung des Tangentialraumes) ist der Tangentialraum im Punkt $\psi(t) \in M$ gegeben durch

$$T_{\psi(t)} = \operatorname{im}(d\psi(t)) = \Big\{ s \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Dies ist übrigens genau die Gerade welche von einer Rotation um 45 Grad im Gegenuhrzeigersinn des Vektors $\psi(t)$ aufgespannt wird.

(c) Eine Rotation um den Winkel a im Gegenuhrzeigersinn bildet $e^t(\cos(t), \sin(t))$ auf $e^t(\cos(t+a), \sin(t+a))$ ab. Dies folgt aus geometrischen Überlegungen oder aus der Matrix-Darstellung der Rotation

$$R_a = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$$

zusammen mit den Additionsformeln für Sinus und Cosinus. Multiplizieren wir noch mit dem Skalar e^a, so finden wir für die Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^2$:

$$f\Big(e^t(\cos(t), \sin(t))\Big) = e^{t+a}(\cos(t+a), \sin(t+a)).$$

Offensichtlich liegt das Bild von f wieder in M, also $f(M) \subseteq M$. Des Weiteren ist f sogar eine Bijektion von M nach M. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$f^{-1} : M \to M, \quad f^{-1}(x) = e^{-a} R_{-a}.$$

Es gilt also sogar $f(M) = M$.

(d) Eine Fortsetzung der Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x) = e^a R_a x.$$

Wir bemerken, dass dies eine lineare Abbildung ist. Somit gilt $dF(x) \cdot v = F \cdot v$. Dies kann man auch aus der Koordinaten-Darstellung von F erkennen:

$$F(x_1, x_2) = e^a \begin{pmatrix} \cos(a)x_1 - \sin(a)x_2 \\ \sin(a)x_1 + \cos(a)x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung lautet in Matrix-Darstellung

$$dF(x) = e^a \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

Die Tangentialabbildung $df(x) : T_xM \to T_{f(x)}M$ für $x \in M$ ist die Einschränkung dieser Ableitung auf den Tangentialraum im Punkt x, also

$$df(x) = dF(x)|_{T_xM} = e^a R_a|_{T_xM}.$$

Die Tangentialabbildung nimmt also ein Tangentialvektor in T_xM, rotiert ihn um den Winkel a im Gegenuhrzeigersinn und streckt ihn um den Faktor e^a. Es gilt übrigens

$$R_a \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t+a) - \sin(t+a) \\ \cos(t+a) + \sin(t+a) \end{pmatrix},$$

wie aus den Additionsformeln für Cosinus und Sinus folgt. Somit finden wir für $x = \psi(t) \in M$ und $s \in \mathbb{R}$:

$$df(\psi(t)) \cdot s \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} = e^a s \begin{pmatrix} \cos(t+a) - \sin(t+a) \\ \cos(t+a) + \sin(t+a) \end{pmatrix}$$

(e) Seien x_0, x_0' zwei Punkte in M. Die Tangentialräume in x_0 und x_0' sind beides Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{R}^2$. Dabei ist der Tangentialraum in x_0' eine Rotation des Tangentialraums in x_0 um den Winkel zwischen x_0' und x_0. Die Abbildung $df(x_0)$ vollzieht diese Rotation und streckt zusätzlich noch die Tangentialvektoren. Liegen x_0 und x_0' beide auf dem Strahl $(0, \infty) \times \{0\}$ (dies entspricht $t = 2\pi n$ für ein $n \in \mathbb{N}$), so sind die Tangentialräume in x_0 und x_0' gleich und die Abbildung $df(x_0)$ ist eine reine Streckung.

5.5. Tangentialabbildung der stereographischen Projektion

Die stereographische Projektion ist die folgende Abbildung

$$\varphi : S^{n-1} \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{1 - x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{1}$$

Diese Formel kann man herleiten in dem man die inverse stereographische Projektion aus Serie 4 invertiert. Wir leiten die Formel vollständigkeitshalber aus geometrischen Überlegunen her. Das Bild von $x \in S^{n-1} \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\}$ unter φ ist der Punkt wo die Gerade durch $(0, \ldots, 0, 1)$ und x die Ebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ schneidet. Diese Gerade ist gegeben durch

$$\Big\{ (tx_1, \ldots, tx_{n-1}, 1 + t(x_n - 1)) \,\big|\, t \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Wir suchen also $t \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ (für gegebenes x), sodass

$$(tx_1, \ldots, tx_{n-1}, 1 + t(x_n - 1)) = (y_1, \ldots, y_{n-1}, 0).$$

Die Lösung der n-ten Gleichung ist gegeben durch $t = (1 - x_n)^{-1}$ und aus den restlichen Gleichungen folgt dann

$$y = \frac{1}{1 - x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Der Tangentialraum in einem Punkt $x \in S^{n-1}$ ist gegeben durch

$$T_x S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle = 0\},$$

also die Vektoren in $\mathbb{R}^n$, die orthogonal zu x sind. Der Tangentialraum in $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist einfach $\mathbb{R}^{n-1}$. Die Formel in (1) gibt eine Fortsetzung Φ von φ auf eine offene

Umgebung von $S^{n-1} \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$, nämlich $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 1\}$. Die Ableitung von Φ lässt sich aus (1) berechnen. Sie bildet einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ auf den folgenden Vektor ab

$$d\Phi(x) \cdot v = \frac{1}{1-x_n} \begin{pmatrix} v_1 + \frac{x_1}{1-x_n} v_n \\ v_2 + \frac{x_2}{1-x_n} v_n \\ \vdots \\ v_{n-1} + \frac{x_{n-1}}{1-x_n} v_n \end{pmatrix}.$$

Die Tangentialabbildung von φ in einem Punkt $x \in S^{n-1} \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$ ist die Einschränkung von $d\Phi(x)$ auf $T_xM = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v\rangle = 0\}$, also

$$d\varphi(x) : T_xM \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad d\varphi(x) = d\Phi(x)|_{T_xM}.$$

5.6. Extrema

(a) Wir bemerken, dass f stetig ist (sogar glatt). Wir schreiben $M = g^{-1}(0)$, wobei $g(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 1$. Da g stetig ist, ist das Urbild von $\{0\}$ abgeschlossen. Des Weiteren ist die Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkt. Somit ist M eine kompakte Menge. Jede stetige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge seine Extrema an, also nimmt f auf M sein Maximum und sein Minimum an.

(b) Kandidaten für das Maximum und Minimum sind die kritischen Punkte von f auf M. Um diese zu finden, verwenden wir den Satz über die Lagrange-Multiplikatorenregel. Dazu führen wir den Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ ein und betrachten die Fortsetzung

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

von f auf $\mathbb{R}^2$. Die kritischen Punkte von f auf M sind gegeben durch die kritischen Punkte der Lagrange-Funktion:

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad L(x_1, x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \lambda(x_1^4 + x_2^4 - 1),$$

wobei wir λ als Variable betrachten. Die kritischen Punkte einer Funktion auf $\mathbb{R}^3$ sind gegeben durch das verschwinden der Ableitung. Die Ableitung von L lautet

$$dL(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 - 4\lambda x_1^3 & 1 - 4\lambda x_2^3 & x_1^4 + x_2^4 - 1 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen also das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} 1 - 4\lambda x_1^3 &= 0, \\ 1 - 4\lambda x_2^3 &= 0, \\ x_1^4 + x_2^4 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{4\lambda}}, \quad x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{4\lambda}}.$$

Setzen wir dies in die dritte Gleichung ein, finden wir

$$2\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^{\frac{4}{3}} = 1,$$

was die folgenden zwei reellen Lösungen für λ ergibt

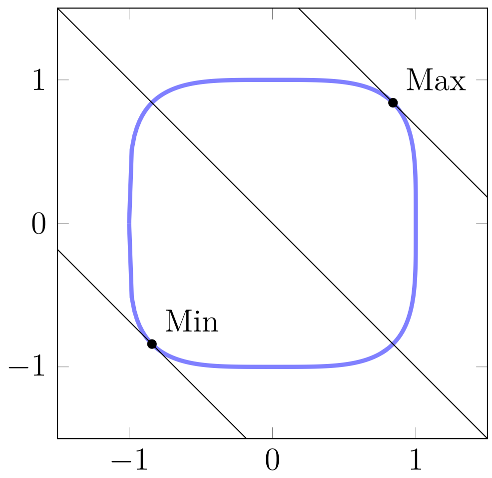
$$\lambda = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{4}, \quad \text{oder} \quad \lambda = -\frac{2^{\frac{3}{4}}}{4}.$$

Die kritischen Punkte von f auf M sind also gegeben durch

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \quad \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right).$$

Setzen wir dies in die Funktion f ein, so sehen wir das $(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ das Maximum von f auf M ist und $(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ das Minimum von f auf M ist.

(c) Wir sehen, dass die kritischen Punkte dort sind, wo die Niveaumengen von f tangential zu M liegen. In diesen Punkten ist der Gradient ∇F der Erweiterung F orthogonal zum Tangentialraum an M. Somit verschwindet in diesen Punkten die Tangentialabbildung df.



(d) Wieder ist die Funktion f stetig auf der kompakten Menge M, also nimmt sie ihre Extremwerte an.

(e) Wir verwenden wieder die Lagrange-Multiplikatorenregel. Offensichtlich ist eine Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}^2$ durch $F(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ gegeben. Die Lagrange-Funktion ist also

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad L(x_1, x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - \lambda(x_1^4 + x_2^4 - 1).$$

Die Ableitung ergibt

$$dL(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4\lambda x_1^3 & 2x_2 - 4\lambda x_2^3 & x_1^4 + x_2^4 - 1 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen also das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} x_1 - 2\lambda x_1^3 &= 0, \\ x_2 - 2\lambda x_2^3 &= 0, \\ x_1^4 + x_2^4 &= 1. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass entweder $x_1 = 0$ oder $x_1^2 = \frac{1}{2\lambda}$ gilt. Falls $x_1 = 0$, folgt aus der dritten Gleichung: $x_2 = \pm 1$. Dies ergibt die beiden kritischen Punkte:

$$(0, 1), \quad (0, -1). \tag{2}$$

(Mit $\lambda = \frac{1}{2}$ ist auch die zweite Gleichung erfüllt.) Aus der zweiten Gleichung folgt ähnlich, dass $x_2 = 0$ oder $x_2^2 = \frac{1}{2\lambda}$. Der erste Fall ergibt die kritischen Punkte

$$(1, 0), \quad (-1, 0). \tag{3}$$

Schliesslich müssen wir noch den Fall

$$x_1^2 = x_2^2 = \frac{1}{2\lambda}$$

betrachten. Eingesetzt in die dritte Gleichung, finden wir $\frac{1}{2\lambda^2} = 1$, also $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Da x_1^2, x_2^2 positiv sind, müssen wir das Plus-Zeichen wählen, also

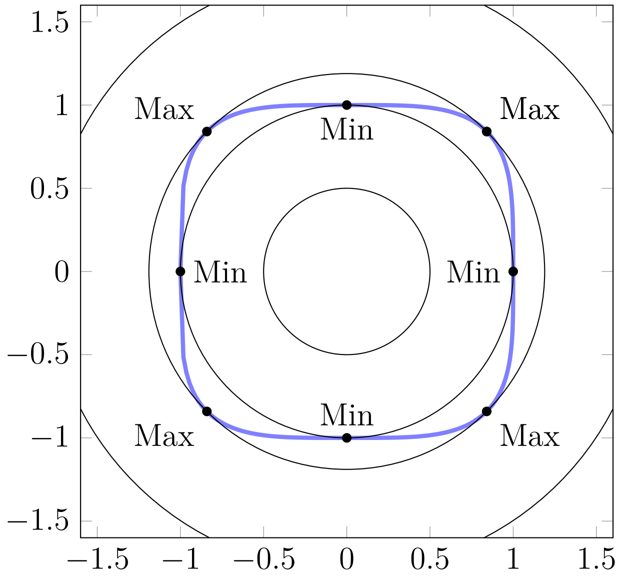
$$x_1^2 = x_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Hier können wir für x_1 und x_2 je die positive oder die negative Wurzel wählen, also finden wir die vier kritischen Punkte:

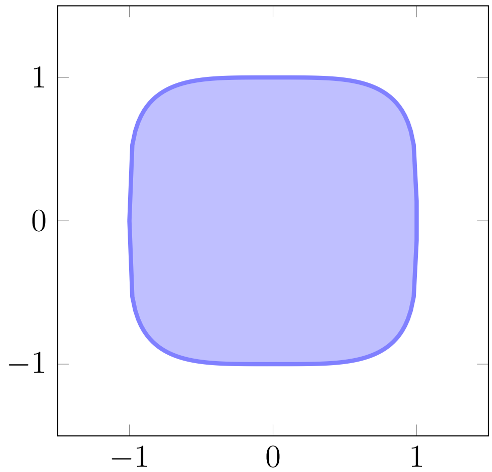
$$\Big(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\Big), \quad \Big(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\Big), \quad \Big(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\Big), \quad \Big(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\Big). \tag{4}$$

Die Funktion f hat also insgesamt acht kritische Punkte auf M. In den ersten vier, also (2) und (3), nimmt f den Wert 1 an, es handelt sich um vier verschiedene Minima. In den zweiten vier, also (4), nimmt f den Wert $\sqrt{2}$ an, es handelt sich um vier verschiedene Maxima.

(f) Wieder befinden sich die kritischen Punkte dort, wo die Niveaumengen von f tangential zu M liegen:



(g) K ist die ausgefüllte Fläche, inklusive Rand.



(h) Wieder ist K beschränkt und abgeschlossen. Somit nimmt die stetige Funktion f seine Extremwerte auf K an.

(i) Wir definieren

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4.$$

Diese Funktion ist als Polynom stetig auf $\mathbb{R}^2$. Die Menge U ist das Urbild unter h von $(-\infty, 1)$:

$$U = h^{-1}((-\infty, 1)).$$

Das Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist wieder offen. Da $(-\infty, 1) \subseteq \mathbb{R}$ offen ist und h stetig, ist also U offen.

(j) Die kritischen Punkte von f auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ sind einfach die Punkte in U, wo die Ableitung df verschwindet. Die Ableitung ist

$$df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Dies verschwindet genau im Punkt $(0, 0)$. Da dieser Punkt in U liegt, ist $(0, 0)$ ein kritischer Punkt von f auf U.

(k) Wir bemerken, dass U genau das Innere der abgeschlossenen Menge K ist, und die Untermannigfaltigkeit M ist gerade der Rand von K. Falls ein Extremum von f auf K im Inneren von K angenommen wird, so muss es ein kritischer Punkt von f auf U sein. Laut der vorherigen Teilaufgabe kommt also der Punkt $(0, 0)$ als Extremum in Frage. Falls hingegen ein Extremum von f auf K auf dem Rand von K angenommen wird, so muss es ein kritischer Punkt von f eingeschränkt auf M sein. Diese kritischen Punkte, insgesamt acht, haben wir auch bereits berechnet. Es gibt also neun Kandidaten für die Extrema. Wir müssen nun die Werte der Funktion f in diesen Punkten prüfen, um zu schliessen wo f sein globales Minimum und Maximum annimmt. Die Werte in den kritischen Punkten auf M haben wir bereits berechnet. Im Punkt $(0, 0)$, gilt $f(0, 0) = 0$. Somit schliessen wir, dass 0 der Minimalwert von f auf K ist, angenommen im Punkt $(0, 0)$, und $\sqrt{2}$ der Maximalwert von f auf K ist, angenommen in den vier Punkten aus (4).