6.1. Extrema

(a) Wir bemerken, dass f stetig ist (sogar glatt). Wir schreiben $M = g^{-1}(0)$, wobei $g(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 1$. Da g stetig ist, ist das Urbild von $\{0\}$ abgeschlossen. Des Weiteren ist die Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkt. Somit ist M eine kompakte Menge. Jede stetige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge seine Extrema an, also nimmt f auf M sein Maximum und sein Minimum an.

(b) Kandidaten für das Maximum und Minimum sind die kritischen Punkte von f auf M. Um diese zu finden, verwenden wir den Satz über die Lagrange-Multiplikatorenregel. Dazu führen wir den Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ ein und betrachten die Fortsetzung

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

von f auf $\mathbb{R}^2$. Die kritischen Punkte von f auf M sind gegeben durch die kritischen Punkte der Lagrange-Funktion:

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad L(x_1, x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \lambda(x_1^4 + x_2^4 - 1),$$

wobei wir λ als Variable betrachten. Die kritischen Punkte einer Funktion auf $\mathbb{R}^3$ sind gegeben durch das verschwinden der Ableitung. Die Ableitung von L lautet

$$dL(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 - 4\lambda x_1^3 & 1 - 4\lambda x_2^3 & x_1^4 + x_2^4 - 1 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen also das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} 1 - 4\lambda x_1^3 &= 0, \\ 1 - 4\lambda x_2^3 &= 0, \\ x_1^4 + x_2^4 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{4\lambda}}, \quad x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{4\lambda}}.$$

Setzen wir dies in die dritte Gleichung ein, finden wir

$$2\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^{\frac{4}{3}} = 1,$$

was die folgenden zwei reellen Lösungen für λ ergibt

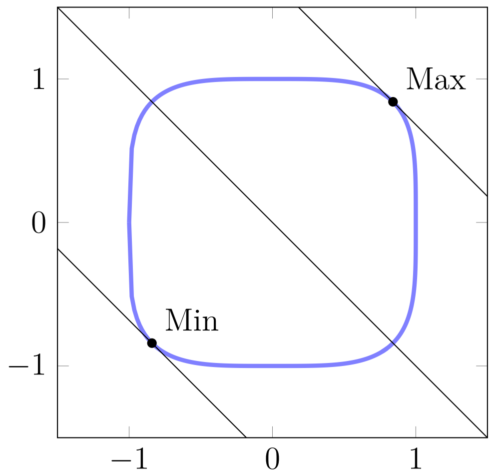
$$\lambda = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{4}, \quad \text{oder} \quad \lambda = -\frac{2^{\frac{3}{4}}}{4}.$$

Die kritischen Punkte von f auf M sind also gegeben durch

$$(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}) \quad (-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}).$$

Setzen wir dies in die Funktion f ein, so sehen wir das $(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ das Maximum von f auf M ist und $(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ das Minimum von f auf M ist.

(c) Wir sehen, dass die kritischen Punkte dort sind, wo die Niveaumengen von f tangential zu M liegen. In diesen Punkten ist der Gradient ∇F der Erweiterung F orthogonal zum Tangentialraum an M. Somit verschwindet in diesen Punkten die Tangentialabbildung df.



(d) Wieder ist die Funktion f stetig auf der kompakten Menge M, also nimmt sie ihre Extremwerte an.

(e) Wir verwenden wieder die Lagrange-Multiplikatorenregel. Offensichtlich ist eine Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}^2$ durch $F(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ gegeben. Die Lagrange-Funktion ist also

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad L(x_1, x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - \lambda(x_1^4 + x_2^4 - 1).$$

Die Ableitung ergibt

$$dL(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4\lambda x_1^3 & 2x_2 - 4\lambda x_2^3 & x_1^4 + x_2^4 - 1 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen also das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} x_1 - 2\lambda x_1^3 &= 0, \\ x_2 - 2\lambda x_2^3 &= 0, \\ x_1^4 + x_2^4 &= 1. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass entweder $x_1 = 0$ oder $x_1^2 = \frac{1}{2\lambda}$ gilt. Falls $x_1 = 0$, folgt aus der dritten Gleichung: $x_2 = \pm 1$. Dies ergibt die beiden kritischen Punkte:

$$(0,1), \quad (0,-1). \tag{1}$$

(Mit $\lambda = \frac{1}{2}$ ist auch die zweite Gleichung erfüllt.) Aus der zweiten Gleichung folgt ähnlich, dass $x_2 = 0$ oder $x_2^2 = \frac{1}{2\lambda}$. Der erste Fall ergibt die kritischen Punkte

$$(1,0), \quad (-1,0). \tag{2}$$

Schliesslich müssen wir noch den Fall

$$x_1^2 = x_2^2 = \frac{1}{2\lambda}$$

betrachten. Eingesetzt in die dritte Gleichung, finden wir $\frac{1}{2\lambda^2} = 1$, also $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Da x_1^2, x_2^2 positiv sind, müssen wir das Plus-Zeichen wählen, also

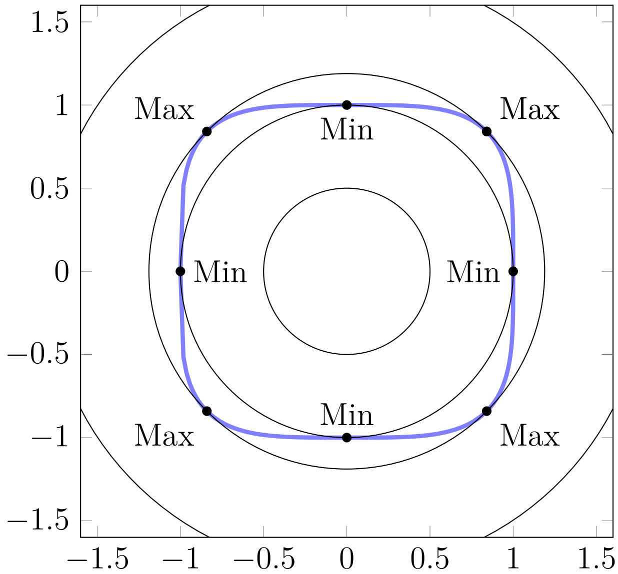
$$x_1^2 = x_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Hier können wir für x_1 und x_2 je die positive oder die negative Wurzel wählen, also finden wir die vier kritischen Punkte:

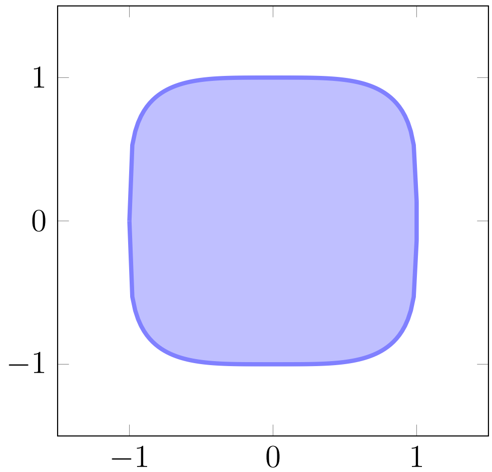
$$\Big(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\Big), \quad \Big(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\Big), \quad \Big(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\Big), \quad \Big(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\Big). \tag{3}$$

Die Funktion f hat also insgesamt acht kritische Punkte auf M. In den ersten vier, also (1) und (2), nimmt f den Wert 1 an, es handelt sich um vier verschiedene Minima. In den zweiten vier, also (3), nimmt f den Wert $\sqrt{2}$ an, es handelt sich um vier verschiedene Maxima.

(f) Wieder befinden sich die kritischen Punkte dort, wo die Niveaumengen von f tangential zu M liegen:



(g) K ist die ausgefüllte Fläche, inklusive Rand.



(h) Wieder ist K beschränkt und abgeschlossen. Somit nimmt die stetige Funktion f seine Extremwerte auf K an.

(i) Wir definieren

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4.$$

Diese Funktion ist als Polynom stetig auf $\mathbb{R}^2$. Die Menge U ist das Urbild unter h von $(-\infty, 1)$:

$$U = h^{-1}((-\infty, 1)).$$

Das Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist wieder offen. Da $(-\infty, 1) \subseteq \mathbb{R}$ offen ist und h stetig, ist also U offen.

(j) Die kritischen Punkte von f auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ sind einfach die Punkte in U, wo die Ableitung df verschwindet. Die Ableitung ist

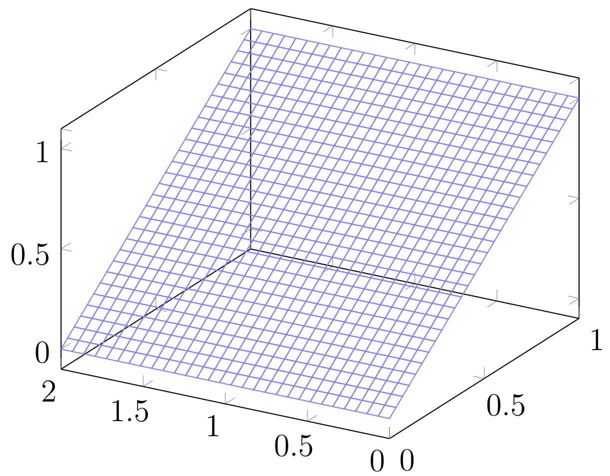
$$df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Dies verschwindet genau im Punkt $(0, 0)$. Da dieser Punkt in U liegt, ist $(0, 0)$ ein kritischer Punkt von f auf U.

(k) Wir bemerken, dass U genau das Innere der abgeschlossenen Menge K ist, und die Untermannigfaltigkeit M ist gerade der Rand von K. Falls ein Extremum von f auf K im Inneren von K angenommen wird, so muss es ein kritischer Punkt von f auf U sein. Laut der vorherigen Teilaufgabe kommt also der Punkt $(0, 0)$ als Extremum in Frage. Falls hingegen ein Extremum von f auf K auf dem Rand von K angenommen wird, so muss es ein kritischer Punkt von f eingeschränkt auf M sein. Diese kritischen Punkte, insgesamt acht, haben wir auch bereits berechnet. Es gibt also neun Kandidaten für die Extrema. Wir müssen nun die Werte der Funktion f in diesen Punkten prüfen, um zu schliessen wo f sein globales Minimum und Maximum annimmt. Die Werte in den kritischen Punkten auf M haben wir bereits berechnet. Im Punkt $(0, 0)$, gilt $f(0, 0) = 0$. Somit schliessen wir, dass 0 der Minimalwert von f auf K ist, angenommen im Punkt $(0, 0)$, und $\sqrt{2}$ der Maximalwert von f auf K ist, angenommen in den vier Punkten aus (3).

6.2. Riemann integral

(a)



(b) Das Riemann-Integral sollte das Volumen unter dem Graphen von f berechnen. Das Volumen des Keils unter diesem Graphen ist gerade die Hälfte vom Volumens des Quaders $[0, 1] \times [0, 2] \times [0, 1]$, also erwarten wir den Wert 1 für das Riemann-Integral von f.

(c) Wir bemerken zuerst, dass f beschränkt ist. Wir werden f von unten und von oben mit Treppenfunktionen approximieren. Dazu teilen wir für jedes $N \in \mathbb{N}$ den Quader $[0,1] \times [0,2]$ in $2N^2$ gleichgrosse Quader mit Flächeninhalt N^{-2} auf. Wir definieren also für $N \in \mathbb{N}$ die folgende Kollektion von Quadern

$$\mathcal{R}^N = \Big\{ Q^N_{j,k} \,|\, j \in \{1, \dots, N\},\, k \in \{1, \dots, 2N\} \Big\},$$

wobei

$$Q^N_{j,k} = \Big[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\Big) \times \Big[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\Big).$$

Weiter definieren wir für jedes $N \in \mathbb{N}$ die folgenden beiden Treppenfunktionen:

$$\varphi^N : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}, \quad \varphi^N = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{j-1}{N} \chi_{Q^N_{j,k}}$$
$$\psi^N : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}, \quad \psi^N = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{j}{N} \chi_{Q^N_{j,k}},$$

wobei $\chi_{Q^N_{j,k}}$ die Indikatorfunktion des Quaders $Q^N_{j,k}$ ist. Die Treppenfunktion φ^N nimmt also auf dem Quader $Q^N_{j,k}$ den Wert $\frac{j-1}{N}$ an, was dem kleinsten Wert der Funktion f auf diesem Quader entspricht. Und ψ^N nimmt auf dem Quader $Q^N_{j,k}$ den Wert $\frac{j}{N}$ an, was dem grössten Wert der Funktion f auf diesem Quader entspricht. Somit gilt offensichtlich für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\varphi^N(x) \leq f(x) \leq \psi^N(x), \quad \forall x \in [0,1] \times [0,2].$$

Wir berechnen nun das Riemann-Integral dieser Treppenfunktionen. Dazu müssen wir per Definition einfach den Wert der Treppenfunktion auf jedem Quader mit dem Flächeninhalt des Quaders multiplizieren und aufsummieren.

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} \varphi^N(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{j-1}{N} |Q^N_{j,k}| = \frac{1}{N^3} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2N} (j-1) = \frac{2}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} j = \frac{N(N-1)}{N^2}$$
$$\int_{[0,1]\times[0,2]} \psi^N(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{j}{N} |Q^N_{j,k}| = \frac{1}{N^3} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2N} j = \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N} j = \frac{N(N+1)}{N^2}.$$

Hier haben wir $|Q^N_{j,k}| = N^{-2}$ verwendet. Der Summand ist unabhängig von k, also ergibt die Summe über k einfach $2N$. Weiter haben wir die Formel für die Summe $\sum_{j=1}^{N} j = \frac{N(N+1)}{2}$ verwendet. Wir bemerken, dass $\int_{[0,1]\times[0,2]} \varphi^N(x)\,dx$ monoton wachsend ist in N und $\int_{[0,1]\times[0,2]} \psi^N(x)\,dx$ monoton fallend. Somit gilt

$$\sup\Big\{\int_{[0,1]\times[0,2]} \varphi^N(x)\,dx \,|\, N \in \mathbb{N}\Big\} = \lim_{N\to\infty} \frac{N(N-1)}{N^2} = 1 \tag{4}$$
$$\inf\Big\{\int_{[0,1]\times[0,2]} \psi^N(x)\,dx \,|\, N \in \mathbb{N}\Big\} = \lim_{N\to\infty} \frac{N(N+1)}{N^2} = 1. \tag{5}$$

Das untere Riemann-Integral von f ist definiert als das Supremum der Integrale aller Treppenfunktionen die kleiner oder gleich f sind und ist somit grösser oder gleich dem Supremum in (4) über eine Teilmenge solcher Treppenfunktionen. Gleichermassen ist das obere Riemann-Integral von f das Infimum der Integrale aller Treppenfunktionen die grösser oder gleich f sind und ist somit kleiner oder gleich dem Infimum in (5) über eine Teilmenge solcher Treppenfunktionen. Es gilt also

$$\underline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx \geq 1, \quad \text{und} \quad \overline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx \leq 1.$$

Somit finden wir

$$\underline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx \geq \overline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx$$

und die Funktion f ist eigentlich Riemann-integrierbar. Da umgekehrt immer gilt

$$\underline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx \leq \overline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx$$

muss also sogar gelten:

$$\underline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx = \overline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx = 1,$$

und wir finden für das Riemann-Integral von f über $[0,1]\times[0,2]$:

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx = 1.$$

6.3. Linearität der Integration

Wir schreiben

$$\phi = \sum_{Q\in\mathcal{R}_1} c_Q \chi_Q, \quad \psi = \sum_{Q'\in\mathcal{R}_2} d_Q \chi_Q$$

für irgendwelche Kollektionen $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ von Quadern in R und konstanten $c_Q, d_Q \in \mathbb{R}$. Offensichtlich ist $c\phi$ wieder eine Treppenfunktion der Form

$$c\phi = \sum_{Q\in\mathcal{R}_1} c c_Q \chi_Q.$$

Für das Riemann-Integral finden wir

$$\int_R c\phi(x)\,dx = \sum_{Q\in\mathcal{R}_1} c c_Q |Q| = c \sum_{Q\in\mathcal{R}_1} c_Q |Q| = c \int_R \phi(x)\,dx.$$

Die Summe der Treppenfunktionen

$$\phi + \psi = \sum_{Q\in\mathcal{R}_1} c_Q\chi_Q + \sum_{Q\in\mathcal{R}_2} c_Q\chi_Q$$

ist wieder eine Treppenfunktion. Falls wir die Vereinigung der beiden Kollektionen $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ betrachten und für $Q \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ die Konstanten $e_Q \in \mathbb{R}$ wie folgt definieren:

$$\begin{aligned}
&e_Q = c_Q \quad \text{falls} \quad Q \in \mathcal{R}_1, Q \notin \mathcal{R}_2,\\
&e_Q = d_Q \quad \text{falls} \quad Q \in \mathcal{R}_2, Q \notin \mathcal{R}_1,\\
&e_Q = c_Q + d_Q \quad \text{falls} \quad Q \in \mathcal{R}_1, Q \in \mathcal{R}_2,
\end{aligned}$$

dann kann die Summe geschrieben werden als

$$\phi + \psi = \sum_{Q\in\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2} e_Q\chi_Q.$$

Für das Riemann-Integral finden wir

$$\int_R (\phi+\psi)(x)\,dx = \sum_{Q\in\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2} e_Q|Q| = \sum_{Q\in\mathcal{R}_1} c_Q|Q| + \sum_{Q\in\mathcal{R}_2} d_Q|Q| = \int_R \phi(x)\,dx + \int_R \psi(x)\,dx.$$

6.4. Integral der Gaußschen Glockenkurve.

Wir bemerken zuerst, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ stetig ist, strikt positiv ist, also $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, und gerade, also $f(-x) = f(x)$. Aus der Stetigkeit folgt, dass f auf jedem beschränkten Intervall Riemann-integrierbar ist. Aus der Positivität von f folgt, dass

$$\int_0^R e^{-x^2}\,dx$$

monoton wachsend ist in $R > 0$. Falls wir also zeigen, dass dieses Integral beschränkt ist für $R > 0$, dann folgt die Konvergenz von

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx.$$

Um die Beschränktheit zu zeigen, verwenden wir die Monotonie des Riemann-Integrals. Es gilt

$$e^{-x^2} \le 1, \quad \text{für} \quad x \in [0,1], \quad \text{und} \quad e^{-x^2} \le xe^{-x^2}, \quad \text{für} \quad x \in [1,\infty).$$

Daraus folgt für $R > 1$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le \int_0^1 1\,dx = 1,\\
&\int_1^R e^{-x^2}\,dx \le \int_1^R xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^R \frac{d}{dx}e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{x=1}^{x=R} = \frac{1}{2}\Big(e^{-1} - e^{-R^2}\Big) \le \frac{1}{2}e^{-1}
\end{aligned}$$

Also gilt für alle $R > 1$:

$$\int_0^R e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^R e^{-x^2}\,dx \le 1 + \frac{1}{2e}.$$

Da die Funktion f gerade ist, folgt nun auch

$$\int_{-R}^0 e^{-x^2}\,dx = \int_0^R e^{-x^2}\,dx \le 1 + \frac{1}{2e}, \quad \forall R$$

Somit konvergiert das uneigentliche Riemann-Integral und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^0 e^{-x^2}\,dx \le 2 + \frac{1}{e} < 3.$$

6.5. Zwei-dimensionale Integrale.

(a) Die Funktion f ist stetig auf $[0,1]\times[0,1]$ und damit Riemann-integrierbar. Auch die Funktionen

$$x_1 \in [0,1] \to f(x_1,x_2), \quad \text{und} \quad x_2 \in [0,1] \to f(x_1,x_2)$$

sind für alle $x_2 \in [0,1]$, respektive $x_1 \in [0,1]$ stetig und damit Riemann-integrierbar. Laut dem Satz von Fubini (siehe insbesondere Korollar zum Vertauschen der Integrationsreihenfolge im Skript von Dr. Ziltener) gilt also

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]\times[0,1]} x_1x_2^2\,dx &= \int_0^1\Big(\int_0^1 x_1x_2^2\,dx_1\Big)dx_2 = \int_0^1\Big(\frac{x_1^2}{2}\Big|_{x_1=0}^{x_1=1}\Big)x_2^2\,dx_2 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x_2^2\,dx_2 = \frac{1}{2}\frac{x_2^3}{3}\Big|_{x_2=0}^{x_2=1} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Im Inneren Integral über x_1 behandeln wir x_2 wie eine Konstante.

(b) Wieder ist f stetig und somit Riemann-integrierbar. Wir können wieder das Korollar zum Vertauschen der Integrationsreihenfolge im Skript von Dr. Ziltener verwenden:

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]\times[1,4]} e^{x_1\sqrt{x_2}}\,dx &= \int_1^4\Big(\int_0^1 e^{x_1\sqrt{x_2}}\,dx_1\Big)dx_2 = \int_1^4\Big(\frac{1}{\sqrt{x_2}}e^{x_1\sqrt{x_2}}\Big|_{x_1=0}^{x_1=1}\Big)\,dx_2 \\ &= \int_1^4\Big(\frac{1}{\sqrt{x_2}}e^{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}}\Big)dx_2 = \Big(2e^{\sqrt{x_2}} - 2\sqrt{x_2}\Big)\Big|_{x_2=1}^{x_2=4} \\ &= 2(e^2 - e - 2 + 1) = 2(e^2 - e - 1).\end{aligned}$$

(c) Die Funktion

$$f : [0,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \arctan\left(e^{x_1} x_2\right),$$

ist stetig (man erinnere sich, dass arctan eine stetige Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ ist). Somit ist f Riemann-integrierbar und wir können die Integrationsreihenfolge vertauschen. Es gilt also

$$\int_{-1}^{1} \Big(\int_0^1 \arctan(e^{x_1} x_2)\, dx_1 \Big) dx_2 = \int_{[0,1]\times[-1,1]} f(x)\, dx = \int_0^1 \Big(\int_{-1}^{1} \arctan(e^{x_1} x_2)\, dx_2 \Big) dx_1.$$

Nun erinnern wir uns, dass arctan eine ungerade Funktion ist, also

$$\arctan(-t) = -\arctan(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Somit verschwindet das innere Integral über $x_2 \in [-1,1]$ und das doppelte Integral in der Aufgabenstellung ergibt Null. Tatsächlich:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \arctan(e^{x_1} x_2)\, dx_2 &= \int_0^1 \arctan(e^{x_1} x_2)\, dx_2 + \int_{-1}^{0} \arctan(e^{x_1} x_2)\, dx_2 \\
&= \int_0^1 \arctan(e^{x_1} x_2)\, dx_2 + \int_0^1 \arctan(-e^{x_1} x_2)\, dx_2 \\
&= \int_0^1 \arctan(e^{x_1} x_2)\, dx_2 - \int_0^1 \arctan(e^{x_1} x_2)\, dx_2 = 0.
\end{aligned}$$

6.6. Volumen eines Simplex (Hypertetraeder).

(a) Für $n = 1$ ist der Simplex das abgeschlossene Intervall $\Delta_1 = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Für $n = 2$ ist der Simplex Δ_2 das abgeschlossene Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0), (0,1)$. Für $n = 3$ ist der Simplex Δ_3 das abgeschlossene Tetraeder mit den Eckpunkten

$$(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).$$

(b) Es gilt

$$\Delta_n = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, x_1, \ldots, x_n \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_n \leq 1 \Big\}.$$

Wir bemerken die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta_n, &\iff x_n \in [0,1],\ x_1, \ldots, x_{n-1} \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_{n-1} \leq 1 - x_n \\
&\iff x_n \in [0,1],\ (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in (1 - x_n)\Delta_{n-1},
\end{aligned}$$

wobei

$$(1 - x_n)\Delta_{n-1} = \Big\{ (1 - x_n)(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mid (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Delta_{n-1} \Big\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

die Skalierung der Menge Δ_{n-1} um den Faktor $(1-x_n)$ ist. Aus der Äquivalenz oben folgt für die charakteristische Funktion χ_{Δ_n} von Δ_n:

$$\chi_{\Delta_n}(x_1,\dots,x_n) = \chi_{(1-x_n)\Delta_{n-1}}(x_1,\dots,x_{n-1}) \cdot \chi_{[0,1]}(x_n),$$

wobei $\chi_{(1-x_n)\Delta_{n-1}}$ die charakteristische Funktion der Menge $(1-x_n)\Delta_{n-1}$ ist.

Δ_n ist im Quader $[0,1]^n$ enthalten. Das Jordan-Mass von Δ_n ist also per Definition

$$|\Delta_n| = \int_{[0,1]^n} \chi_{\Delta_n}(x)\,dx,$$

Schreiben wir $x \in \mathbb{R}^n$ als $x = (x', x_n)$ mit $x' = (x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, so finden wir dank dem Satz von Fubini und der Beobachtung oben

$$\begin{aligned} |\Delta_n| &= \int_{[0,1]^n} \chi_{\Delta_n}(x)\,dx = \int_0^1 \Big(\int_{[0,1]^{n-1}} \chi_{\Delta_n}(x', x_n)\,dx'\Big) dx_n \\ &= \int_0^1 \Big(\int_{[0,1]^{n-1}} \chi_{(1-x_n)\Delta_{n-1}}(x')\,dx'\Big) dx_n = \int_0^1 |(1-x_n)\Delta_{n-1}|\,dx_n, \end{aligned} \tag{6}$$

wobei $|(1-x_n)\Delta_{n-1}|$ das Jordan-Mass der Menge $(1-x_n)\Delta_{n-1}$ ist.

Wir benötigen nun einen Hilfssatz über das Jordan-Mass einer skalierten Menge. Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge und $c > 0$ gilt nämlich

$$|cA| = c^n |A|.$$

Dies folgt aus der Beobachtung

$$\chi_{cA}(x) = \chi_A(c^{-1}x).$$

Verwenden wir den Satz von Fubini und die n Substitution $y_1 = \frac{x_1}{c}, \dots y_n = \frac{x_n}{c}$, so finden wir

$$\begin{aligned} |cA| &= \int \chi_{cA}(x)\,dx = \int \chi_A(c^{-1}x)\,dx = \int \cdots \int \chi_A\Big(\frac{x_1}{c},\dots,\frac{x_n}{c}\Big)\,dx_1 \cdots dx_n \\ &= c^n \int \cdots \int \chi_A(y_1,\dots,y_n)\,dy_1 \cdots dy_n = c^n \int \chi_A(y)\,dy = c^n |A|. \end{aligned}$$

Aus diesem Hilfssatz schliessen wir:

$$|(1-x_n)\Delta_{n-1}| = (1-x_n)^{n-1} |\Delta_{n-1}|.$$

Setzen wir dies in die Gleichung (6) ein, so finden wir

$$\begin{aligned} |\Delta_n| &= \int_0^1 (1-x_n)^{n-1} |\Delta_{n-1}|\,dx_n = |\Delta_{n-1}| \int_0^1 (1-x_n)^{n-1}\,dx_n = |\Delta_{n-1}| \frac{-(1-x_n)^n}{n}\Big|_{x_n=0}^{x_n=1} \\ &= \frac{1}{n} |\Delta_{n-1}| \end{aligned}$$

Wir haben also eine Rekursionsformel, welche das Jordan-Mass von $|\Delta_n|$ durch das Jordan-Mass von $|\Delta_{n-1}|$ ausdrückt. Aus dieser folgt:

$$|\Delta_n| = \frac{1}{n}|\Delta_{n-1}| = \frac{1}{n(n-1)}|\Delta_{n-2}| = \cdots = \frac{1}{n!}|\Delta_1|.$$

Da $\Delta_1 = [0,1]$ mit Jordan-Mass $|[0,1]| = 1$, finden wir schliesslich

$$|\Delta_n| = \frac{1}{n!}.$$

6.7. Integral von Potenzen des Cosinus.

Wir argumentieren induktiv. Für $n = 0$ besagt die Formel:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \pi,$$

und für $n = 1$ besagt die Formel:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt = 2.$$

Die Fälle $n = 0, 1$ sind also offensichtlich wahr. Dies ist die Induktionsverankerung.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Unter Verwendung der partiellen Integration finden wir

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos^{n-1}(t)\,dt \\
&= \sin(t)\cos^{n-1}(t)\Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{n-2}(t)\,dt \\
&= 0 + (n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\cos^{n-2}(t)\,dt \\
&= (n-1)\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(t)\,dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt\Big),
\end{aligned}$$

wobei wir $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ verwendet haben. Daraus folgt:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt = \frac{n-1}{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(t)\,dt.$$

Wir haben also eine Rekursionsformel gefunden. Nehmen wir die Formel in der Aufgabenstellung als Induktionsannahme, so folgt die Formel für $n \in \mathbb{N}$ aus der

Formel für $n-2$ und der obigen Rekursionsformel. Per Induktion ist die Formel also für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wahr.

6.8. Volumen des Einheitsballs.

Wir gehen ähnlich wie in Aufgabe 6.6 vor. Der abgeschlossene Einheitsball in $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\overline{B}^n = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\right\}.$$

Wir bemerken, dass der Querschnitt von $\overline{B}^n$ mit der Ebene $x_n =$ konstant gerade der $n-1$ Ball mit Radius $\sqrt{1-x_n^2}$ ist, was der skalierten Menge $\sqrt{1-x_n^2} \cdot \overline{B}^{n-1}$ entspricht. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) \in \overline{B}^n &\iff x_n \in [-1,1],\, x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 - x_n^2 \\ &\iff x_n \in [-1,1],\, (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \sqrt{1-x_n^2} \cdot \overline{B}^{n-1}.\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\chi_{\overline{B}^n}(x_1, \dots, x_n) = \chi_{\sqrt{1-x_n^2} \cdot \overline{B}^{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot \chi_{[-1,1]}(x_n).$$

Aus der Aufgabe 6.6 wissen wir:

$$\left|\sqrt{1-x_n^2} \cdot \overline{B}^{n-1}\right| = \left(\sqrt{1-x_n^2}\right)^{n-1} \left|\overline{B}^{n-1}\right|.$$

Der Einheitsball $\overline{B}^n$ ist im Quader $[-1,1]^n$ enthalten. Schreiben wir nun $x \in \mathbb{R}^n$ als $x = (x', x_n)$ mit $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ und verwenden den Satz von Fubini, so finden wir

$$\begin{aligned}\left|\overline{B}^n\right| &= \int_{[-1,1]^n} \chi_{\overline{B}^n}(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \int_{[-1,1]^{n-1}} \chi_{\overline{B}^n}(x', x_n)\, dx' \Big) dx_n \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{[-1,1]^{n-1}} \chi_{\sqrt{1-x_n^2}\overline{B}^{n-1}}(x')\, dx' \Big) dx_n = \int_{-1}^{1} \left|\sqrt{1-x_n^2} \cdot \overline{B}^{n-1}\right| dx_n \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x_n^2}\right)^{n-1} dx_n \left|\overline{B}^{n-1}\right|.\end{aligned}$$

Wir müssen also das obige Integral über x_n berechnen. Dazu verwenden wir die Substitution $x_n = \sin(t)$ mit $dx_n = \cos(t) dt$ und finden

$$\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x_n^2}\right)^{n-1} dx_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1-\sin^2(t)}\right)^{n-1} \cos(t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt.$$

In Aufgabe 6.7 haben wir eine Formel für dieses Integral gefunden. Bezeichnen wir diese Zahl mit I_n, also

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt,$$

so erhalten wir also

$$\left|\overline{B}^n\right| = I_n\left|\overline{B}^{n-1}\right| = I_n I_{n-1}\left|\overline{B}^{n-2}\right| = \cdots = I_n I_{n-1}\cdots I_2\left|\overline{B}^1\right|.$$

Der Einheitsball in $\mathbb{R}$ ist einfach das abgeschlossene Intervall $\overline{B}^1 = [-1,1]$, dessen Jordan-Mass $|\overline{B}^1| = 2$ ist. Aus der Formel in Aufgabe 6.7 sehen wir, dass sowohl für n gerade wie n ungerade gilt

$$I_n I_{n-1} = \frac{(n-1)(n-3)\cdots}{n(n-2)\cdots}\cdot\frac{(n-2)(n-4)\cdots}{(n-1)(n-3)\cdots}\cdot 2\pi = \frac{2\pi}{n}.$$

Daraus folgt für n ungerade:

$$\left|\overline{B}^n\right| = (I_n I_{n-1})\cdots(I_3 I_2)\left|\overline{B}^1\right| = \frac{2\pi}{n}\frac{2\pi}{n-2}\cdots\frac{2\pi}{3}\cdot 2 = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n(n-2)\cdots 3},$$

und für n gerade:

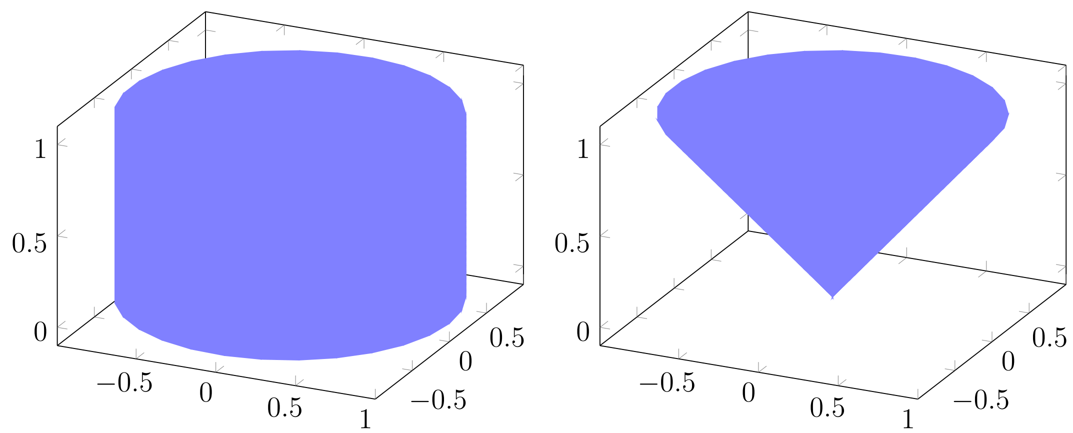
$$\left|\overline{B}^n\right| = (I_n I_{n-1})\cdots(I_4 I_3)I_2\left|\overline{B}^1\right| = \frac{2\pi}{n}\frac{2\pi}{n-2}\cdots\frac{2\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2 = \frac{2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{n(n-2)\cdots 2}.$$

Bemerkung: Dies kann man etwas schöner schreiben, wenn man die Eulersche Gammafunktion Γ kennt. Mit dieser Gammafunktion lässt sich das Volumen (Jordan-Mass) des n-dimensionalen Einheitsballs für n sowohl gerade wie ungerade schreiben als

$$\left|\overline{B}^n\right| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

6.9. Volumen von Zylinder, Kegel und Ball

(a)



(b) Der Querschnitt des Zylinders $\overline{B}^2 \times [0,1]$ mit der Ebene $x_3 =$ konstant ist der Einheitsball (Einheitsscheibe) $\overline{B}^2$ in $\mathbb{R}^2$. Mit dem Satz von Fubini folgern wir:

$$|\text{Zylinder}| = \int_0^1 \left|\overline{B}^2\right| dx_3 = \left|\overline{B}^2\right| = \pi.$$

Der Querschnitt des Kegels $\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3 \in [0,1],\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_3\}$ mit der Ebene $x_3 =$ konstant ist der Ball (Kreisscheibe) mit Radius x_3 in $\mathbb{R}^2$, also $\overline{B}^2_{x_3} = x_3\overline{B}^2$. Wir finden wieder dank dem Satz von Fubini und dem Verhalten vom Jordan-Mass unter Skalierung:

$$|\text{Kegel}| = \int_0^1 \left|x_3\overline{B}^2\right| dx_3 = \int_0^1 x_3^2\left|\overline{B}^2\right| dx_3 = \int_0^1 \pi x_3^2 \, dx_3 = \frac{\pi}{3}.$$

(c) Das Volumen des Halb-Balls ist offensichtlich die Hälfte des Volumens des Einheitsballs in $\mathbb{R}^3$. Dank Aufgabe 6.8 wissen wir $\left|\overline{B}^3\right| = \frac{4\pi}{3}$, also gilt

$$|\text{Halb-Ball}| = \frac{2\pi}{3}.$$

Wir sehen also, dass

$$|\text{Halb-Ball}| + |\text{Kegel}| = |\text{Zylinder}|.$$

Dies lässt sich auch wie folgt erklären. Auch für x im Halb-Ball muss die dritte Koordinate, wie im Fall von Zylinder und Kegel, $x_3 \in [0,1]$ erfüllen. Der Querschnitt des Halb-Balls mit der Ebene $x_3 =$ konstant ist der Ball (Kreisscheibe) mit Radius $\sqrt{1 - x_3^2}$ in $\mathbb{R}^2$. Diese Kreisscheibe besitzt die Fläche $(1 - x_3^2)\pi$. Somit addieren sich die Querschnitte des Halb-Balls und des Kegels mit der Ebene $x_3 =$ konstant gerade zu einer vollen Einheitsscheibe, also zum Querschnitt des Zylinders mit der Ebene $x_3 =$ konstant. Archimedes von Syrakus (ca. 287 v.Chr. - ca. 212 v.Chr.) verwendete diese Beobachtung, um das Volumen des 3-dimensionalen Balls zu berechnen.