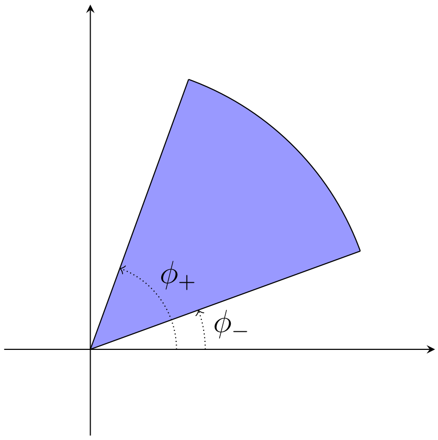
7.1. Kuchenstück

(a)



(b) Wir verwenden Polarkoordinaten und die Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ die offene Menge

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \Big((-\infty, 0] \times \{0\} \Big).$$

Die Polarkoordinaten definieren einen glatten Diffeomorphismus

$$\Psi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to U, \quad \Psi(r, \phi) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$d\Psi(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad \det(d\Psi(r, \phi)) = r.$$

Wir bemerken, dass $(0, 0)$ in S liegt, aber nicht im Bild der Polarkoordinaten, also $(0, 0) \notin U$. Da aber $(0, 0)$ verschwindendes zwei-dimensionales Jordan-Mass hat, können wir dies ignorieren (siehe unten für ein rigoroseres Argument). Es gilt also $|S| = |S \cap U|$ und in Polarkoordinaten ist $S \cap U$ das Rechteck $\Psi^{-1}(S \cap U) = (0, 1] \times [\phi_-, \phi_+]$. Mit der Substitutionsregel finden wir

$$|S| = \int_S 1\, dx = \int_0^1 \int_{\phi_-}^{\phi_+} r\, d\phi dr = (\phi_+ - \phi_-) \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=1} = \frac{\phi_+ - \phi_-}{2}.$$

Um das Problem, dass S nicht in U enthalten ist, etwas rigoroser zu behandeln, können wir vorgehen wie im Abschnitt *Integral einer drehinvarianten Funktion* im Skript von F. Ziltener. Wir approximieren die Menge S durch die Mengen $S_\varepsilon = S \setminus B^2_\varepsilon$, wobei B^2_ε der offene Ball mit Radius ε ist. Wir schneiden also sozusagen den problematischen Punkt $(0, 0)$ aus der Menge, stellen dabei aber sicher, dass S_ε eine abgeschlossene

Menge ist. Wir bemerken, dass $\overline{S_\varepsilon} = S_\varepsilon \subseteq U$. Somit ist die Substitutionsregel auf das Integral über S_ε anwendbar. Es gilt $\Psi^{-1}(S_\varepsilon) = [\varepsilon, 1] \times [\phi_-, \phi_+]$ und wir finden

$$|S_\varepsilon| = \int_{S_\varepsilon} 1\, dx = \int_{\Psi^{-1}(S_\varepsilon)} |\det(d\Psi(r,\phi))|\, drd\phi = \int_\varepsilon^1 \int_{\phi_-}^{\phi_+} r\, d\phi dr = \frac{\phi_+ - \phi_-}{2}(1-\varepsilon^2).$$

Dies konvergiert gegen $\frac{1}{2}(\phi_+ - \phi_-)$ wenn $\varepsilon \to 0$. Auf der anderen Seite konvergiert der Flächeninhalt von S_ε gegen den Flächeninhalt von S, also $|S_\varepsilon| \to |S|$ wenn $\varepsilon \to 0$. Somit gilt

$$|S| = \frac{\phi_+ - \phi_-}{2}.$$

7.2. Integral einer drehinvarianten Funktion in $\mathbb{R}^3$

(a) Wir gehen vor wie im Abschnitt *Integral einer drehinvarianten Funktion* im Skript von F. Ziltener. Nun ist aber f eine drehinvariante Funktion in $\mathbb{R}^3$ anstatt $\mathbb{R}^2$. Wir verwenden deshalb Kugelkoordinaten anstatt Polarkoordinaten. Sei

$$U = \mathbb{R}^3 \setminus \Big\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq 0,\ x_2 = 0\Big\}.$$

Dann definieren Kugelkoordinaten einen glatten Diffeomorphismus

$$\Psi : (0,\infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to U,$$

gegeben durch

$$\Psi(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix},$$

siehe Serie 3. Wir berechnen:

$$d\Psi(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\cos\theta & -r\cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \det\Big(\Psi(r,\phi,\theta)\Big) = r^2\cos(\theta).$$

Wir bemerken, dass $\|\Psi(r,\phi,\theta)\| = r$ und deshalb

$$f(\Psi(r,\phi,\theta)) = \widetilde{f}(\|\Psi(r,\phi,\theta)\|) = \widetilde{f}(r)$$

Laut der Substitutionsregel gilt also

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{B}^3_{r_0}} f(x)\, dx &= \int_0^{r_0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\Psi(r,\phi,\theta)) |\det(d\Psi(r,\phi,\theta))|\, drd\phi d\theta \\
&= \int_0^{r_0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{f}(r) r^2 \cos(\theta)\, drd\phi d\theta \\
&= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\, d\theta \int_0^{r_0} \widetilde{f}(r) r^2\, dr \\
&= 4\pi \int_0^{r_0} \widetilde{f}(r) r^2\, dr.
\end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte Formel.

Wir haben etwas geschummelt. Eigentlich ist die Substitutionsregel nicht direkt anwendbar, da $\overline{B}^3_{r_0}$ nicht im Bild von Ψ enthalten ist. Dies kann gelöst werden, indem wir den Ball $\overline{B}^3_{r_0}$ approximieren durch abgeschlossene Mengen, die im Bild von Ψ enthalten sind. Dazu definieren wir für $\varepsilon > 0$ den Quader

$$R_\varepsilon = [\varepsilon, r_0] \times [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon] \times [-\tfrac{\pi}{2} + \varepsilon, \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon]$$

und dessen Bild unter der Kugelkoordinaten-Abbildung

$$S_\varepsilon = \Psi(R_\varepsilon).$$

Wir bemerken, dass S_ε eine abgeschlossene Menge ist, die in U enthalten ist. Wir können also die Substitutionsregel auf Integrale über S_ε anwenden. Wenn ε gegen 0 geht, nähert sich S_ε der Menge $\overline{B}_{r_0}$ an und es gilt

$$\int_{S_\varepsilon} f(x)\,dx \longrightarrow \int_{\overline{B}^3_{r_0}} f(x)\,dx, \quad \text{wenn} \quad \varepsilon \to 0.$$

Andererseits finden wir mit der Substitutionsregel (mit $y = (r, \phi, \theta)$):

$$\begin{aligned}
\int_{S_\varepsilon} f(x)\,dx &= \int_{R_\varepsilon} f(\Psi(y))|\det(d\Psi(y))|\,dy \\
&= \int_\varepsilon^{r_0} \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \widetilde{f}(r) r^2 \cos(\theta)\,dr d\phi d\theta \\
&= (2\pi - 2\epsilon)(\sin(\tfrac{\pi}{2} - \varepsilon) - \sin(-\tfrac{\pi}{2} + \varepsilon)) \int_\varepsilon^{r_0} \widetilde{f}(r) r^2\,dr.
\end{aligned}$$

Dies konvergiert wenn $\varepsilon \to 0$ gegen

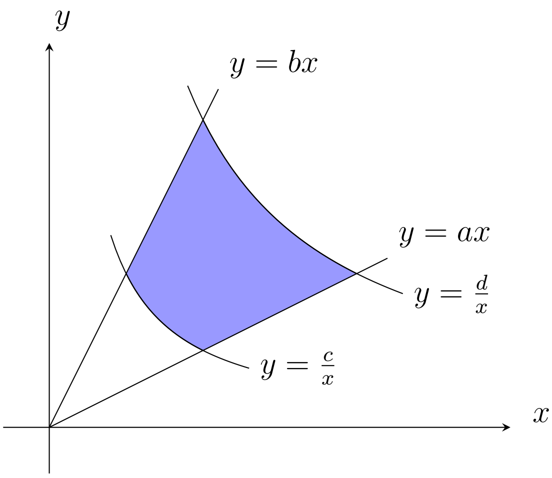
$$\int_{\overline{B}^3_{r_0}} f(x)\,dx = 4\pi \int_0^{r_0} \widetilde{f}(r) r^2\,dr.$$

(b) Das Volumen von $\overline{B}^3_{r_0}$ ist einfach das Integral der Funktion $f(x) = 1$ über $\overline{B}^3_{r_0}$. Mit der Formel oben finden wir

$$|\overline{B}^3_{r_0}| = 4\pi \int_0^{r_0} 1 \cdot r^2\,dr = 4\pi \frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=r_0} = \frac{4\pi}{3} r_0^3.$$

7.3. Flächeninhalt

(a)



(b) Wir versuchen die Koordinaten

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = xy$$

einzuführen, denn dann können wir über das Rechteck $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ integrieren. Dazu definieren wir

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty) \times (0, \infty), \quad \Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} \\ xy \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass Φ glatt und bijektiv ist. Es gilt $\Phi(S) = [a, b] \times [c, d]$. Um die Substitutionsregel für ein mehrdimensionales Integral anzuwenden, benötigen wir die Inverse von Φ. Bezüglich den Koordinaten u, v gilt

$$x = \sqrt{\frac{v}{u}}, \quad \text{und} \quad y = \sqrt{uv}.$$

Also ist die Inverse zu Φ gegeben durch

$$\Psi : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty) \times (0, \infty), \quad \Psi(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{v}{u}} \\ \sqrt{uv} \end{pmatrix}.$$

Auch dies ist eine glatte Abbildung und somit ist Ψ ein Diffeomorphismus. Des Weiteren ist S abgeschlossen und es gilt

$$S \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty), \quad \Psi^{-1}(S) = [a, b] \times [c, d].$$

Wir berechnen die Ableitung (Jacobi-Matrix):

$$d\Psi(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der Jacobi-Matrix lautet

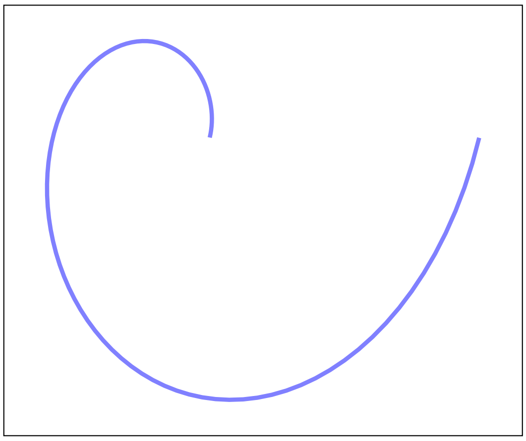
$$\det(d\Psi(u,v)) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{u} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{u} = -\frac{1}{2u}.$$

Mit der Substitutionsregel finden wir nun

$$\begin{aligned}|S| &= \int_S 1\,dxdy = \int_{\Psi^{-1}(S)} |\det(d\Psi(u,v))|\,dudv = \int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{1}{2u}\,dudv \\ &= \int_a^b \Big(\int_c^d \frac{1}{2u}\,dv\Big)du = \frac{d-c}{2}\int_a^b \frac{1}{u}\,du = \frac{d-c}{2}\log(u)\Big|_{u=a}^{u=b} \\ &= \frac{d-c}{2}\big(\log(b)-\log(a)\big) = \frac{d-c}{2}\log\Big(\frac{b}{a}\Big).\end{aligned}$$

7.4. Länge eines Bogens auf der logarithmischen Spirale.

(a)



(b) Wir zeigen, dass C eine global parametrisierbare Untermannigfaltigkeit mit Rand ist. (Siehe eine Definition (parametrisierbare Untermannigfaltigkeit) im Skript von F. Ziltener.) Die globale Parametrisierung der Kurve C ist im Wesentlichen bereits in der Definition von C gegeben. Sei nämlich

$$\psi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t)\end{pmatrix},$$

dann ist C das Bild von ψ. Genauer ist das Paar $((0,2\pi),\psi)$ eine globale Parametrisierung von C. Wir haben bereits in der Serie 5 gezeigt, dass die Abbildung

$$\tilde\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \tilde\psi(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t)\end{pmatrix},$$

eine glatte Einbettung ist. Die Abbildung ψ ist einfach die Einschränkung von $\tilde{\psi}$ auf $[0, 2\pi]$ und somit auch eine glatte Einbettung. Somit ist C eine glatte eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ mit Rand.

(c) Der Rand von C ist gegeben durch das Bild unter ψ der beiden Randpunkte 0 und 2π des Intervalls $[0, 2\pi]$, also

$$\partial C = \psi(\partial[0, 2\pi]) = \{\psi(0), \psi(2\pi)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2\pi} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) Die Bogenlänge von C ist gegeben durch das Integral

$$l(C) = \int_C 1\, ds = \int_0^{2\pi} \|\dot{\psi}(t)\|\, dt,$$

siehe das Skript von F. Ziltener. Wir berechnen mit der Produktregel

$$\dot{\psi}(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos(t) - \sin(t)) \\ e^t(\sin(t) + \cos(t)) \end{pmatrix}$$

und finden

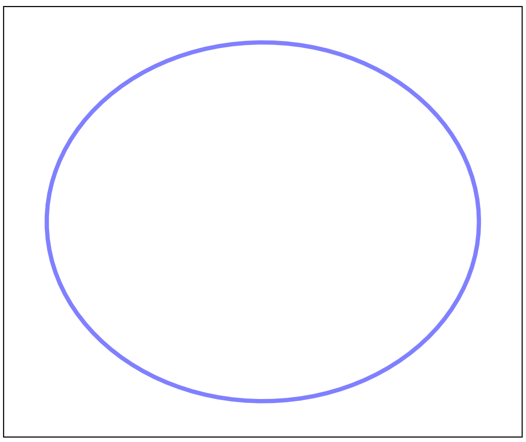
$$\|\dot{\psi}(t)\| = e^t \sqrt{(\cos(t) - \sin(t))^2 + (\sin(t) + \cos(t))^2} = e^t \sqrt{(2\cos^2(t) + 2\sin^2(t))} = \sqrt{2} e^t.$$

Somit lautet die Bogenlänge

$$l(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} e^t\, dt = \sqrt{2} e^t \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1).$$

7.5. Ellipse, Orientierungen, C^k-Gebiet, positive Orientierung des Randes, Kurvenintegral eines Vektorfeldes.

(a)



(b) Wir verwenden den Satz vom regulären Wert, um zu zeigen, dass C eine glatte eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist (also eine glatte Kurve). Sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2.$$

Dann ist g eine glatte Funktion mit Ableitung

$$dg(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 8x_2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist für alle $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ eine surjektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Die Kurve C ist das Urbild von 1 unter g. Da $(0, 0) \notin g^{-1}(1)$ ist 1 ein regulärer Wert von g und $C = g^{-1}(1)$ somit eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $2 - 1 = 1$.

(c) Da $C = g^{-1}(1)$, ist der Tangentialraum im Punkt $x \in C$ gegeben durch

$$T_xC = \ker(dg(x)) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2x_1 & 8x_2 \end{pmatrix} \cdot v = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1v_1 + 8x_2v_2 = 0\},$$

siehe einen Satz (Charakterisierung des Tangentialraumes) aus der Vorlesung. Dies ist ein eindimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$. Eine Basis ist z.B. gegeben durch den Vektor $\begin{pmatrix} -4x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Alternativer Lösungsweg: Wir parametrisieren die Kurve C mit einem Weg γ, sodass $\dot\gamma(t) \neq 0$ für alle t (Immersion). Der Tangentialraum im Punkt $\gamma(t)$ wird dann aufgespannt von der Ableitung $\dot\gamma(t)$.

(d) Eine Orientierung von C ist gegeben durch ein Einheitstangentialvektorfeld, also eine stetige Abbildung

$$T : C \to \mathbb{R}^2, \quad \text{mit} \quad T(x) \in T_xC, \quad \text{und} \quad \|T(x)\| = 1 \quad \forall x \in C.$$

Wir bemerken, dass der Vektor

$$\begin{pmatrix} -4x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \in T_xC$$

stetig von C abhängt. Durch Normierung erhalten wir das Einheitstangentialvektorfeld

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + 16x_2^2}} \begin{pmatrix} -4x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt genau eine andere Orientierung von C, nämlich das Einheitstangentialvektorfeld in die entgegengesetzte Richtung:

$$-T = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + 16x_2^2}} \begin{pmatrix} 4x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Alternative Lösung: Wenn wir die Kurve $C = \partial U$ mit einem Weg γ parametrisieren, so dass das Gebiet U immer zur Linken (in Durchlaufrichtung) von γ liegt, dann erhalten wir mit der normierten Ableitung $T = \|\gamma\|^{-1}\dot{\gamma}$ gerade das positiv orientierte Einheitstangentialvektorfeld. Genauer ist das Vektorfeld $T : C \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung definiert auf der Kurve C und die Ableitung des Wegs $\dot{\gamma} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung definiert auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Der Zusammenhang lautet

$$T(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\dot{\gamma}(t).$$

Wir parametrisieren die Ellipse C mit dem Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Es gilt $C = \gamma([0, 2\pi])$ und $\gamma|_{(0,2\pi)}$ ist eine injektive Immersion (sogar eine Einbettung). Die Ableitung lautet

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \frac{1}{2}\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein Tangentialvektor im Punkt $(x_1, x_2) = \gamma(t) = (\cos(t), \frac{1}{2}\sin(t))$. Wir können diesen Tangentialvektor bezüglich den Koordinaten (x_1, x_2) also auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} -2x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix}.$$

Normieren wir nun noch diesen Vektor, so finden wir als positiv orientiertes Einheitstangentialvektorfeld:

$$T : C \to \mathbb{R}^2, \quad T(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}x_1^2 + 4x_2^2}} \begin{pmatrix} -2x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix}.$$

(e) Der Rand von U ist gerade C, also $\partial U = C$. Wir haben bereits gesehen, dass $C = g^{-1}(1)$. Wir definieren nun die glatte Funktion

$$\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \tilde{g}(x) = g(x) - 1 = x_1^2 + 4x_2^2 - 1.$$

Es gilt $d\tilde{g} = \tilde{g}$, und wir haben bereits gesehen, dass die Ableitung von g in jedem Punkt ausser $(0, 0)$ surjektiv ist. Somit ist $\tilde{g}$ eine Submersion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Jeder Punkt in ∂U liegt in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dies ist also eine Umgebung von jedem $x \in \partial U$. Des Weiteren gilt

$$U \cap \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \tilde{g}^{-1}((-\infty, 0)) = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \,|\, \tilde{g}(x) < 0\}$$

Somit ist U ein C^∞-Gebiet.

(f) Die Menge

$$U = \{x_1^2 + 4x_2^2 < 1\}$$

ist offen und ihr Abschluss ist gegeben durch

$$\overline{U} = \{x_1^2 + 4x_2^2 \leq 1\}.$$

Wie schon oben bemerkt ist der Rand von U also gerade

$$\partial U = \overline{U} \setminus U = \{x_1^2 + 4x_2^2 = 1\} = C.$$

(g) Wenn wir die Kurve $C = \partial U$ mit einem Weg γ parametrisieren, so dass das Gebiet U immer zur Linken (in Durchlaufrichtung) von γ liegt, dann erhalten wir mit der normiereten Ableitung $T = \|\gamma\|^{-1}\dot{\gamma}$ gerade das positiv orientierte Einheitstangentialvektorfeld. Genauer ist das Vektorfeld $T : C \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung definiert auf der Kurve C und die Ableitung des Wegs $\dot{\gamma} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung definiert auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Der Zusammenhang lautet

$$T(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\dot{\gamma}(t).$$

Wir parametrisieren die Ellipse C mit dem Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Es gilt $C = \gamma([0, 2\pi])$ und $\gamma|_{(0,2\pi)}$ ist eine injektive Immersion (sogar eine Einbettung). Die Ableitung lautet

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \frac{1}{2}\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein Tangentialvektor im Punkt $(x_1, x_2) = \gamma(t) = (\cos(t), \frac{1}{2}\sin(t))$. Wir können diesen Tangentialvektor bezüglich den Koordinaten (x_1, x_2) also auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} -2x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix}.$$

Normieren wir nun noch diesen Vektor, so finden wir als positiv orientiertes Einheitstangentialvektorfeld:

$$T : C \to \mathbb{R}^2, \quad T(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}x_1^2 + 4x_2^2}} \begin{pmatrix} -2x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix}.$$

Alternative Lösung: Der Tangentialraum lässt sich finden anhand der Funktion $g(x) = x_1^2 + 4x_2^2$ und dem dritten Teil eines Satzes aus der Vorlesung (Charakterisierung des Tangentialraumes). Die Kurve ist gegeben durch $C = g^{-1}(1)$, also ist der Tangentialraum im Punkt $x \in C$ gegeben durch

$$T_xC = \ker(dg(x)).$$

Es gilt

$$dg(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 8x_2 \end{pmatrix},$$

also

$$\ker(dg(x)) = \left\{v \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1v_1 + 8x_2v_2 = 0\right\} = \left\{s \begin{pmatrix} -2x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\right\}.$$

Der Tangentialraum im Punkt x ist ein-dimensional und besitzt somit zwei Einheitsvektoren, nämlich

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}x_1^2 + 4x_2^2}} \begin{pmatrix} -2x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}x_1^2 + 4x_2^2}} \begin{pmatrix} 2x_2 \\ -\frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix}.$$

Die positive Orientierung erhalten wir, wenn wir in jedem Punkt $x \in C$ den Einheitstangentialvektor v wählen mit

$$\det(\nabla g(x), v) > 0.$$

Da

$$\det(\nabla g(x), v_1) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}x_1^2 + 4x_2^2}} \det \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 8x_2 & \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}x_1^2 + 4x_2^2}} (x_1^2 + 16x_2^2) > 0,$$

gibt die Wahl von v_1 in jedem Punkt x das positiv orientierte Einheitstangentialvektorfeld.

(h) Per Definition gilt für das Kurvenintegral

$$\begin{aligned}\int_{C,T} X \cdot d\mathbf{s} &= \int_C X \cdot T\, ds = \int_{[0,2\pi]} X(\gamma(t)) \cdot T(\gamma(t)) \|\dot\gamma(t)\|\, dt \\ &= \int_{[0,2\pi]} X(\gamma(t)) \cdot \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|} \|\dot\gamma(t)\|\, dt = \int_{[0,2\pi]} X(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt.\end{aligned}$$

Wir können für das Kurvenintegral eines Vektorfeldes also die Normierung des Tangentialvektorfelds geradesogut weglassen und einfach das Wegintegral von X längs γ berechnen.

$$\begin{aligned}\int_{C,T} X \cdot d\mathbf{s} &= \int_{[0,2\pi]} X(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \frac{1}{2}\cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{4}\sin^2(t) + \frac{1}{4}\cos^2(t)\Big)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\, dt = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Alternative Lösung: Wir wenden den Satz von Green an. Da $C = \partial U$ und die positive Orientierung verwendet wird, ist das Kurvenintegral gleich dem zwei-dimensionalen Integral von $\operatorname{rot} X$ über U:

$$\int_{C,T} X \cdot d\mathbf{s} = \int_U \operatorname{rot} X(x)\, dx.$$

Es gilt

$$\operatorname{rot} X(x) = \partial_1 X^2(x) - \partial_2 X^1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Also

$$\int_U \operatorname{rot} X(x)\, dx = \int_U 1\, dx = \frac{1}{2}\int_{B^2} 1\, dy = \frac{1}{2}\pi,$$

wobei wir im letzten Schritt die Substitutionsregel für den Koordinatenwechsel

$$(y_1, y_2) = (x_1, 2x_2), \quad \text{also} \quad (x_1, x_2) = \Psi(y_1, y_2) = (y_1, \tfrac{1}{2}y_2)$$

mit $\Psi^{-1}(U) = B^2$ und $\det(d\Psi) = \frac{1}{2}$, verwendet haben.

7.6. Integral der Rotation eines Vektorfelds

Eine Möglichkeit ist das Integral direkt zu berechnen. Es gilt

$$\operatorname{rot} X(x) = \partial_1 X^2(x) - \partial_2 X^1(x) = 2x_1^2 + \|x\|^2 + 2x_2^2 + \|x\|^2 = 4\|x\|^2.$$

Und unter Verwendung von Polarkoordinaten und der Substitutionsregel finden wir:

$$\int_{B^2} \operatorname{rot} X(x)\, dx = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4r^2\, r\, d\phi dr = 2\pi \int_0^1 4r^3\, dr = 2\pi r^4\Big|_{r=0}^{r=1} = 2\pi.$$

Alternative Lösung: Wir wenden den Satz von Green an. Es gilt

$$\int_{B^2} \operatorname{rot} X(x)\, dx = \int_{\partial B^2} X \cdot d\mathbf{s} = \int_{S^1} X \cdot d\mathbf{s},$$

wobei wir für das Kurvenintegral das positiv orientierte Einheitstangentialvektorfeld verwenden müssen. Dies entspricht einer parametrisierung des Einheitskreises bei der das Innere immer zur Linken liegt, also

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Da $\|\gamma(t)\|^2 = 1$ für alle t, finden wir

$$\int_{S^1} X \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$