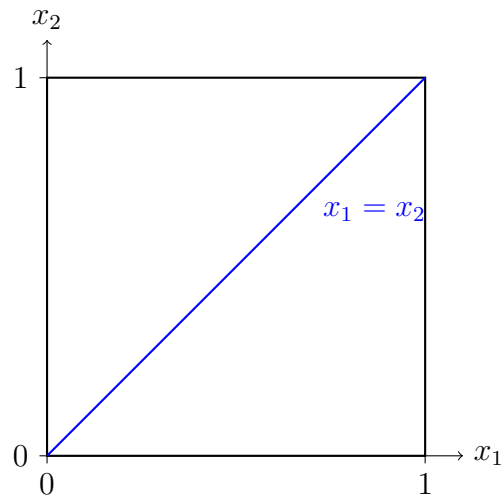


8.1. Kurve mit Rand, Koorientierung

(a)



(b) Sei $p = x_0 \in M$.

Fall $p_2 < 1$: Wir definieren

$$V_1 := [0, 1), \quad \psi_1 : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \psi_1(y) := (y, y).$$

Die Abbildung ψ_1 ist eine glatte lokale Randparametrisierung von M , sodass $p \in \psi_1(V_1)$. (Überprüfen Sie das! Betrachten Sie dazu $U_1 := \mathbb{R} \times (-\infty, 1)$.)

Fall $p_2 = 1$: Dann definieren wir

$$V_2 := [0, 1), \quad \psi_2 : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \psi_2(y) := (1 - y, 1 - y).$$

Die Abbildung ψ_2 ist eine glatte lokale Randparametrisierung von M , sodass $p \in \psi(V_2)$. (Überprüfen Sie das! Betrachten Sie dazu $U_2 := \mathbb{R} \times (0, \infty)$.)

Da die obigen Fälle alle Möglichkeiten abdecken, folgt, dass M eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $d = 1$ mit Rand ist.

Alternative Lösung: Wir können M wie folgt global parametrisieren (siehe Definition zur parametrisierbaren Untermannigfaltigkeit im Skript von F. Ziltener):

$$\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(y) = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung ψ ist glatt und es gilt $M = \psi([0, 1])$. Wir müssen noch zeigen, dass ψ eine Einbettung ist. Es gilt

$$d\psi(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat für alle y vollen Rang, also ist $d\psi(y)$ eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$. Somit ist ψ eine Immersion. Die Abbildung ψ ist offensichtlich auch injektiv und die Umkehrung ist gegeben durch

$$\psi^{-1} : M \rightarrow [0, 1], \quad \psi^{-1}(x, x) = x,$$

was offensichtlich glatt ist. Die Abbildung ψ , genauer das Paar $((0, 1), \psi)$ ist also eine globale Parametrisierung von M und M somit eine glatte eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ mit Rand.

(c) Wir definieren (V_j, ψ_j) , $j = 1, 2$, wie in (b). Gemäss Definition ist der intrinsische Rand von M gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial M &:= \bigcup \left\{ \psi(V \cap (\mathbb{R}^{d-1=0} \times \{0\})) \mid (V, \psi) \text{ lokale } C^k \text{ Randparametrisierung von } M \right\} \\ &= \psi_1(V_1 \cap \{0\}) \cup \psi_2(V_2 \cap \{0\}) \\ &= \{\psi_1(0), \psi_2(0)\} \\ &= \{(0, 0), (1, 1)\}. \end{aligned}$$

Alternative Lösung: Wir definieren die globale Parametrisierung (V, ψ) wie in (b). Der (intrinsische) Rand von M ist gegeben durch

$$\partial M = \psi(\partial V),$$

wobei

$$V = (0, 1).$$

Es gilt also

$$\partial M = \{(0, 0), (1, 1)\}$$

(d) Wir suchen eine Abbildung $\nu \in C(M, \mathbb{R}^2)$, sodass

$$\nu(x) \in T_x M^\perp, \quad \|\nu(x)\| = 1, \quad \forall x \in M.$$

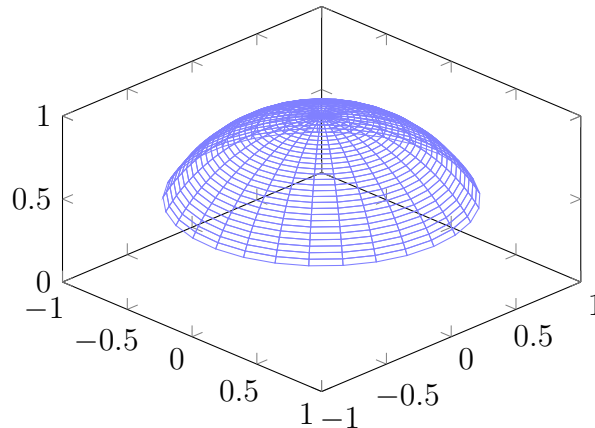
Mittels reiner geometrischer Überlegungen sieht man, dass

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

wobei die andere Koorientierung durch $-\nu$ gegeben ist.

8.2. Kugelkappe, intrinsischer Rand, Koorientierung, induzierte Orientierung des Randes, Flächeninhalt.

(a)



(b) Für $x \in \Sigma$ gilt $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ und $x_3 \geq a$. Somit muss gelten $x_1^2 + x_2^2 \leq 1 - a^2$, also (x_1, x_2) liegt in $\overline{B}_{\sqrt{1-a^2}}^2$, der Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{1-a^2}$. Wir können Σ wie folgt parametrisieren:

$$\psi : \overline{B}_{\sqrt{1-a^2}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \sqrt{1-y_1^2-y_2^2} \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass ψ glatt ist (da $y_1^2 + y_2^2 < 1$) und $\Sigma = \psi(\overline{B}_{\sqrt{1-a^2}}^2)$. Wir müssen noch zeigen, dass ψ eine Einbettung ist. Dazu berechnen wir

$$d\psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & -\frac{y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat für jedes (y_1, y_2) Rang 2, also ist $d\psi(y_1, y_2)$ eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$. Somit ist ψ eine Immersion. Die Abbildung ψ ist auch offensichtlich injektiv. Die Umkehrung zu ψ ist gegeben durch

$$\psi^{-1} : \Sigma \rightarrow \overline{B}_{\sqrt{1-a^2}}^2, \quad \psi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

was offensichtlich glatt ist. Die Abbildung ψ , genauer das Paar $(\overline{B}_{\sqrt{1-a^2}}^2, \psi)$ ist also eine globale Parametrisierung von Σ und Σ somit eine glatte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ mit Rand.

(c) Der (intrinsische) Rand von Σ kann einfach mit der globalen Parametrisierung bestimmt werden:

$$\partial\Sigma = \psi(\partial B_{\sqrt{1-a^2}}^2),$$

wobei

$$\partial B_{\sqrt{1-a^2}}^2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 = 1 - a^2\}$$

der Rand der Kreisscheibe $B_{\sqrt{1-a^2}}^2$ ist. Es gilt also

$$\begin{aligned}\partial\Sigma &= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \sqrt{1-y_1^2-y_2^2} \end{pmatrix} \mid (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, y_1^2 + y_2^2 = 1 - a^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ a \end{pmatrix} \mid (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, y_1^2 + y_2^2 = 1 - a^2 \right\}.\end{aligned}$$

(d) Eine Koorientierung von Σ ist gegeben durch ein Einheitsnormalvektorfeld, also eine stetige Abbildung

$$\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{mit} \quad \nu(x) \in T_x \Sigma^\perp, \quad \text{und} \quad \|\nu(x)\| = 1 \quad \forall x \in \Sigma.$$

Also $\nu(x)$ ist ein normierter Vektor, der orthogonal zum Tangentialraum $T_x \Sigma$ liegt. Da $\Sigma \subseteq S^2$ eine Teilmenge der Sphäre ist, erhalten wir ein Einheitsnormalvektorfeld auf Σ durch die Einschränkung auf Σ eines Einheitsnormalvektorfeldes auf der Sphäre. Die zwei Koorientierungen auf S^2 sind

$$\tilde{\nu} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tilde{\nu}(x) = x, \quad \text{und} \quad -\tilde{\nu}(x) = -x.$$

Somit sind

$$\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \nu(x) = x, \quad \text{und} \quad -\nu(x) = -x$$

die zwei Koorientierungen auf Σ .

Alternativ, und nützlicher für den allgemeinen Fall, kann man ein Normalvektorfeld anhand der Parametrisierung ψ konstruieren. In jedem Punkt $\psi(y) \in \Sigma$ sind die Vektoren $\partial_{y_1}\psi(y), \partial_{y_2}\psi(y) \in \mathbb{R}^3$ zwei unabhängige Tangentialvektoren. Somit liegt ihr Kreuzprodukt $\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)$ orthogonal zum Tangentialraum in $\psi(y)$. Durch Normieren erhalten wir ein Einheitsnormalvektor:

$$\nu(\psi(y)) = \frac{1}{\|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\|} \partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y).$$

Wir berechnen

$$\partial_{y_1}\psi(y_1, y_2) \times \partial_{y_2}\psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \\ \frac{y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Quadrat der Norm ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \|\partial_{y_1}\psi(y_1, y_2) \times \partial_{y_2}\psi(y_1, y_2)\|^2 &= \frac{y_1^2}{1-y_1^2-y_2^2} + \frac{y_2^2}{1-y_1^2-y_2^2} + 1 \\ &= \frac{y_1^2 + y_2^2}{1-y_1^2-y_2^2} + \frac{1-y_1^2-y_2^2}{1-y_1^2-y_2^2} = \frac{1}{1-y_1^2-y_2^2}. \end{aligned}$$

Wir finden also

$$\nu(\psi(y_1, y_2)) = \sqrt{1-y_1^2-y_2^2} \begin{pmatrix} \frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \\ \frac{y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \sqrt{1-y_1^2-y_2^2} \end{pmatrix} = \psi(y_1, y_2)$$

Dieses Einheitsnormalvektorfeld stimmt also mit $\nu(x) = x$ überein. Die andere Koorientierung ist gegeben durch $-\nu$.

(e) Die Koorientierung

$$\nu(\psi(y)) = \frac{1}{\|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\|} \partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y),$$

welche durch die globale Parametrisierung $\psi : B_{\sqrt{1-a^2}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bestimmt ist, induziert eine Orientierung auf dem Rand $\partial\Sigma$. Sie ist gegeben indem man die positive Orientierung $\tilde{T}(y)$ auf $\partial B_{\sqrt{1-a^2}}^2$ nimmt und mit der Ableitung der Parametrisierung $d\psi(y)$ nach $T_{\psi(y)}\partial\Sigma$ abbildet und normiert, also

$$T : \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(\psi(y)) = \frac{1}{\|d\psi(y)\tilde{T}(y)\|} d\psi(y)\tilde{T}(y).$$

Wir haben die Ableitung $d\psi$ bereits berechnet. Die positive Orientierung auf dem Kreis $\partial B_{\sqrt{1-a^2}}^2$ ist das Einheitstangentenvektorfeld, sodass die Kreisscheibe $B_{\sqrt{1-a^2}}^2$ immer zur Linken liegt. Es ist gegeben durch

$$\tilde{T} : \partial B_{\sqrt{1-a^2}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{T}(y_1, y_2) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen:

$$d\psi(y_1, y_2)\tilde{T}(y_1, y_2) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & -\frac{y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir bemerken, dass dieser Vektor bereits normiert ist, da $y_1^2 + y_2^2 = 1 - a^2$ für $(y_1, y_2) \in \partial B_{\sqrt{1-a^2}}^2$. Die induzierte Orientierung auf dem Rand ist also gegeben durch

$$T(\psi(y)) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oder mit $(x_1, x_2, x_3) = \psi(y_1, y_2) = (y_1, y_2, \sqrt{1-y_1^2-y_2^2})$:

$$T : \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(f) Der Flächeninhalt von Σ ist gegeben durch das folgende Flächenintegral über Σ :

$$\text{Vol}_2(\Sigma) = \int_{\Sigma} 1 \, dA.$$

Im Fall der zweidimensionalen Fläche Σ in $\mathbb{R}^3$, kann dieses Integral anhand der Parametrisierung $\psi : \overline{B}_{\sqrt{1-a^2}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, wie folgt berechnet werden:

$$\int_{\Sigma} 1 \, dA = \int_{\overline{B}_{\sqrt{1-a^2}}^2} \|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\| \, dy,$$

wobei das Integral auf der rechten Seite einfach das zweidimensionale Riemann-Integral über die Kreisscheibe $\overline{B}_{\sqrt{1-a^2}}^2$ ist. Wir setzen

$$\|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\| = \frac{1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}$$

ein und verwenden Polarkoordinaten und die Substitutionsregel, um das Riemann-Integral auszurechnen:

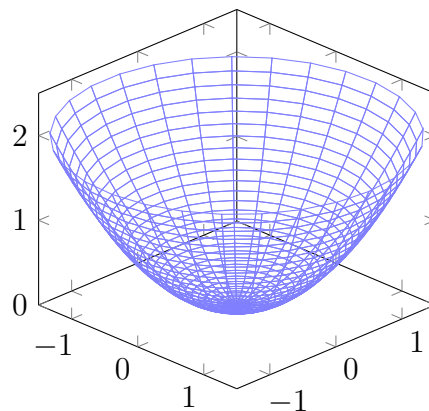
$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} 1 \, dA &= \int_{\overline{B}_{\sqrt{1-a^2}}^2} \frac{1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1-a^2}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r \, dr \, d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{1-a^2}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \, dr = -2\pi \sqrt{1-r^2} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{1-a^2}} = 2\pi(1-a). \end{aligned}$$

(g) Wir haben oben für $a \in (0, 1)$ den Flächeninhalt der Kugelkappe $\{x \in S^2 \mid x_3 \geq a\}$ berechnet. Im Limes $a \rightarrow 0$ erhalten wir den Flächeninhalt der Halbsphäre $\{x \in S^2 \mid x_3 \geq 0\}$. Dieser beträgt laut der Formel oben $\lim_{a \rightarrow 0} 2\pi(1 - a) = 2\pi$. Die Sphäre S^2 besteht aus den beiden identischen Halbsphären $\{x \in S^2 \mid x_3 \geq 0\}$ und $\{x \in S^2 \mid x_3 \leq 0\}$, wobei der Schnitt der beiden Halbsphären der eindimensionale Kreis $\{x \in S^2 \mid x_3 = 0\}$ ist, dessen zweidimensionaler Flächeninhalt Null ist. Der Flächeninhalt der Sphäre beträgt also zweimal 2π :

$$\text{Vol}(S^2) = 4\pi.$$

8.3. Abgeschnittenes Paraboloid, intrinsischer Rand, Koorientierung, induzierte Orientierung des Randes, Flächeninhalt.

(a)



(b) Wir zeigen, dass Σ global parametrisiert werden kann, siehe eine Definition (parametrisierbare Untermannigfaltigkeit) in den Notizen von F. Ziltener. Für alle $x \in \Sigma$ gilt $x_1^2 + x_2^2 \leq r_0^2$, also liegt der Vektor (x_1, x_2) in $\overline{B}_{r_0}^2$, der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius r_0 . Zu jedem solchen (x_1, x_2) genau ein Punkt $x \in \Sigma$, nämlich mit $x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Wir können Σ also wie folgt parametrisieren:

$$\psi : \overline{B}_{r_0}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung ψ ist glatt und es gilt $\Sigma = \psi(\overline{B}_{\sqrt{1-a^2}}^2)$. Wir zeigen noch, dass ψ eine Einbettung ist. Es gilt

$$d\psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat für jedes (y_1, y_2) Rang 2, also ist $d\psi(y_1, y_2)$ eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$. Somit ist ψ eine Immersion. Die Abbildung ψ ist offensichtlich auch injektiv und die Umkehrung ist gegeben durch

$$\psi^{-1} : \Sigma \rightarrow \overline{B}_{r_0}^2, \quad \psi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

was offensichtlich glatt ist. Die Abbildung ψ , genauer das Paar $(B_{r_0}^2, \psi)$ ist also eine globale Parametrisierung von Σ und Σ somit eine glatte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ mit Rand.

(c) Der (intrinsische) Rand von Σ ist gegeben durch

$$\partial\Sigma = \psi(\partial B_{r_0}^2),$$

wobei

$$\partial B_{r_0}^2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 = r_0^2\}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \partial\Sigma &= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix} \mid (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, y_1^2 + y_2^2 = r_0^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \frac{1}{2}r_0^2 \end{pmatrix} \mid (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, y_1^2 + y_2^2 = r_0^2 \right\}. \end{aligned}$$

(d) Eine Koorientierung von Σ ist gegeben durch das Einheitsnormalvektorfeld

$$\nu(\psi(y)) = \frac{1}{\|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\|} \partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y).$$

Wir berechnen

$$\partial_{y_1}\psi(y_1, y_2) \times \partial_{y_2}\psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Norm dieses Vektors ist

$$\|\partial_{y_1}\psi(y_1, y_2) \times \partial_{y_2}\psi(y_1, y_2)\| = \sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2}.$$

Wir finden also als Koorientierung:

$$\nu(\psi(y_1, y_2)) = \frac{1}{\sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2}} \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In den Koordinaten (x_1, x_2, x_3) auf $\mathbb{R}^3$ kann dies wie folgt geschrieben werden:

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+2x_3}} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die andere Koorientierung ist gegeben durch $-\nu(x)$.

(e) Die durch die Koorientierung

$$\nu(\psi(y)) = \frac{1}{\|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\|} \partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y),$$

bestimmte Orientierung des Randes $\partial\Sigma$ ist gegeben durch

$$T : \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(\psi(y)) = \frac{1}{\|d\psi(y)\tilde{T}(y)\|} d\psi(y)\tilde{T}(y),$$

wobei $\tilde{T}(y)$ die positive Orientierung auf $\partial\bar{B}_{r_0}^2$ ist. Diese ist gegeben durch

$$\tilde{T} : \partial B_{r_0}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{T}(y_1, y_2) = \frac{1}{r_0} \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

(Es ist das Einheitstangentialvektorfeld auf $\partial\bar{B}_{r_0}^2$, sodass die Kreisscheibe $B_{r_0}^2$ immer zur Linken liegt). Wir berechnen:

$$d\psi(y_1, y_2)\tilde{T}(y_1, y_2) = \frac{1}{r_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_0} \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir bemerken, dass dieser Vektor bereits normiert ist, da $y_1^2 + y_2^2 = r_0^2$ für $(y_1, y_2) \in \partial B_{r_0}^2$. In den Koordinaten (x_1, x_2, x_3) auf $\mathbb{R}^3$ ist die induzierte Orientierung auf dem Rand also gegeben durch

$$T : \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x) = \frac{1}{r_0} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(f) Der Flächeninhalt von Σ wird mit dem folgenden Flächenintegral berechnet:

$$\text{Vol}_2(\Sigma) = \int_{\Sigma} 1 \, dA = \int_{\bar{B}_{r_0}^2} \|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\| \, dy.$$

Wir haben bereits berechnet:

$$\|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\| = \sqrt{1+y_1^2+y_2^2}.$$

Mit Polarkoordinaten und der Substitutionsregel finden wir:

$$\begin{aligned}\text{Vol}_2(\Sigma) &= \int_{\overline{B}_{r_0}^2} \sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2} dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sqrt{1 + r^2} r dr d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{r_0} \sqrt{1 + r^2} r dr = \frac{2\pi}{3} (1 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{r=r_0} = \frac{2\pi}{3} \left((1 + r_0^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right).\end{aligned}$$

(g) Wir wissen, dass der Flächeninhalt der Kreisscheibe $\text{Vol}_2(\overline{B}_{r_0}^2) = \pi r_0^2$ beträgt. Der gefragte Grenzwert ist also

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}_2(\Sigma_{r_0})}{\text{Vol}_2(\overline{B}_{r_0}^2)} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}((1 + r_0^2)^{\frac{3}{2}} - 1)}{r_0^2} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{2r_0 \sqrt{1 + r_0^2}}{2r_0} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \sqrt{1 + r_0^2} = 1,$$

wobei wir die Regel von de L'Hospital verwendet haben. Im Grenzwert $r_0 \rightarrow 0$ stimmt also der Flächeninhalt des Paraboloids Σ_{r_0} immer wie mehr mit der Fläche der Kreisscheibe $\overline{B}_{r_0}^2$ überein. Dies ist vernünftig, da für sehr kleines r_0 die Fläche Σ_{r_0} fast wie eine Scheibe in $\mathbb{R}^2$ aussieht.

8.4. Fluss durch abgeschnittenes Paraboloid Laut einer Definition in den Notizen von F. Ziltener (Fluss durch Hyperfläche) ist der Fluss von einem Vektorfeld X durch Σ gegeben durch

$$\int_{\Sigma, \nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\Sigma} X(x) \cdot \nu(x) dA.$$

Im Fall von unserer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ mit globaler Parametrisierung ψ ist dieses Integral gegeben durch

$$\int_{\Sigma, \nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\overline{B}_{r_0}^2} X(\psi(y)) \cdot (\partial_{y_1} \psi(y) \times \partial_{y_2} \psi(y)) dy,$$

wobei im Integral das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\partial_{y_1} \psi(y) \times \partial_{y_2} \psi(y)$ und $X(\psi(y))$ vorkommt. Wir haben bereits berechnet:

$$\partial_{y_1} \psi(y_1, y_2) \times \partial_{y_2} \psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für

$$X(x) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist das Skalarprodukt

$$X(\psi(y)) \cdot (\partial_{y_1} \psi(y) \times \partial_{y_2} \psi(y)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Der Fluss ist also

$$\int_{\Sigma, \nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\overline{B}_{r_0}} 1 \, dy = \text{Vol}_2(\overline{B}_{r_0}) = \pi r_0^2.$$

Für

$$X(x) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist das Skalarprodukt

$$X(\psi(y)) \cdot (\partial_{y_1} \psi(y) \times \partial_{y_2} \psi(y)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = -y_1.$$

Der Fluss ist also

$$\int_{\Sigma, \nu} X \cdot d\mathbf{A} = - \int_{\overline{B}_{r_0}} y_1 \, dy = 0.$$

Das letzte Integral verschwindet dank einem Symmetrie-Argument oder man könnte direkt in Polarkoordinaten rechnen

$$\int_{\overline{B}_{r_0}} y_1 \, dy = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\phi) \, d\phi dr = 0,$$

da $\int_0^{2\pi} \cos(\phi) \, d\phi = 0$.

8.5. Gramsche Determinante für eine 3×2 -Matrix.

Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix},$$

wobei $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^3$ die Spalten von A sind. Die transponierte Matrix lautet

$$A^T = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{pmatrix},$$

also die Vektoren A_1, A_2 sind die Reihen von A^T . Die Matrix-Multiplikation ergibt

$$A^T A = \begin{pmatrix} A_1 \cdot A_1 & A_1 \cdot A_2 \\ A_2 \cdot A_1 & A_2 \cdot A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|A_1\|^2 & A_1 \cdot A_2 \\ A_1 \cdot A_2 & \|A_2\|^2 \end{pmatrix},$$

wobei $v \cdot w$ das Skalarprodukt von zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet. Die Gramsche Determinante lautet also

$$\det(A^T A) = \|A_1\|^2 \|A_2\|^2 - (A_1 \cdot A_2)^2.$$

Sei nun α der Winkel zwischen den Vektoren A_1 und A_2 . Wir erinnern uns, dass die Länge des Kreuzproduktes von A_1 und A_2 gegeben ist durch

$$\|A_1 \times A_2\| = \|A_1\| \|A_2\| \sin(\alpha).$$

Andererseits gilt für das Skalarprodukt:

$$A_1 \cdot A_2 = \|A_1\| \|A_2\| \cos(\alpha).$$

Somit finden wir

$$\begin{aligned} \det(A^T A) &= \|A_1\|^2 \|A_2\|^2 - (A_1 \cdot A_2)^2 = \|A_1\|^2 \|A_2\|^2 - \|A_1\|^2 \|A_2\|^2 \cos^2(\alpha) \\ &= \|A_1\|^2 \|A_2\|^2 (1 - \cos^2(\alpha)) = \|A_1\|^2 \|A_2\|^2 \sin^2(\alpha) = \|A_1 \times A_2\|^2. \end{aligned}$$

Alternativ kann man direkt mit den Koeffizienten rechnen. Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} \|v \times w\|^2 &= (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 \\ &= v_1^2 (w_2^2 + w_3^2) + v_2^2 (w_1^2 + w_3^2) + v_3^2 (w_1^2 + w_2^2) \\ &\quad - 2v_1 w_1 v_2 w_2 - 2v_1 w_1 v_3 w_3 - 2v_2 w_2 v_3 w_3 \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \\ &\quad - v_1^2 w_1^2 - v_2^2 w_2^2 - v_3^2 w_3^2 - 2v_1 w_1 v_2 w_2 - 2v_1 w_1 v_3 w_3 - 2v_2 w_2 v_3 w_3 \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 \\ &= \|v\|^2 \|w\|^2 - (v \cdot w)^2. \end{aligned}$$