9.1. Fluss durch abgeschnittenes Paraboloid, Satz von Stokes

(a) Laut einer Definition in den Notizen von F. Ziltener (Fluss durch Hyperfläche) ist der Fluss von einem Vektorfeld X durch Σ gegeben durch

$$\int_{\Sigma,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\Sigma} X(x) \cdot \nu(x)\, dA.$$

Im Fall von unserer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ mit globaler Parametrisierung ψ ist dieses Integral gegeben durch

$$\int_{\Sigma,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\overline{B}_{r_0}} X(\psi(y)) \cdot (\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y))\, dy,$$

wobei im Integral das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)$ und $X(\psi(y))$ vorkommt. Wir haben bereits berechnet:

$$\partial_{y_1}\psi(y_1, y_2) \times \partial_{y_2}\psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für

$$X(x) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist das Skalarprodukt

$$X(\psi(y)) \cdot (\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Der Fluss ist also

$$\int_{\Sigma,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\overline{B}_{r_0}} 1\, dy = \mathrm{Vol}_2(\overline{B}_{r_0}) = \pi r_0^2.$$

Für

$$X(x) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist das Skalarprodukt

$$X(\psi(y)) \cdot (\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = -y_1.$$

Der Fluss ist also

$$\int_{\Sigma,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = -\int_{\overline{B}_{r_0}} y_1 \, dy = 0.$$

Das letzte Integral verschwindet dank einem Symmetrie-Argument oder man könnte direkt in Polarkoordinaten rechnen

$$\int_{\overline{B}_{r_0}} y_1 \, dy = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\phi) \, d\phi dr = 0,$$

da $\int_0^{2\pi} \cos(\phi) \, d\phi = 0$.

(b) Laut dem Satz von Stokes (siehe Vorlesung) gilt

$$\int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times Y) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial\Sigma,T} Y \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial\Sigma} Y \cdot T \, ds,$$

wobei T die durch ν induzierte Orientierung auf dem Rand $\partial\Sigma$ ist. Diese Orientierung haben wir bereits in der vorherigen Aufgabe berechnet:

$$T(x) = \frac{1}{r_0} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Skalarprodukt lautet

$$Y(x) \cdot T(x) = \frac{1}{r_0} \sin(x_3) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_0} \sin(x_3)(x_1^2 - x_2 x_3).$$

Um das Kurvenintegral zu berechnen, parametrisieren wir

$$\partial\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \frac{1}{2} r_0^2 \end{pmatrix} \,\middle|\, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \, y_1^2 + y_2^2 = r_0^2 \right\}$$

mit dem Weg:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} r_0 \cos(t) \\ r_0 \sin(t) \\ \frac{1}{2} r_0^2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -r_0 \sin(t) \\ r_0 \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = r_0.$$

Das Kurvenintegral lautet somit

$$\int_{\partial\Sigma} Y \cdot T\, ds = \int_0^{2\pi} Y(\gamma(t)) \cdot T(\gamma(t)) \|\dot\gamma(t)\|\, dt = \sin\Big(\frac{r_0^2}{2}\Big) \int_0^{2\pi} \Big(r_0^2 \cos^2(t) - \frac{r_0^3}{2}\sin(t)\Big)\, dt$$
$$= r_0^2 \sin\Big(\frac{r_0^2}{2}\Big) \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt = \pi r_0^2 \sin\Big(\frac{r_0^2}{2}\Big).$$

Alternativ könnte man auch direkt die Kurve $\partial\Sigma$ parametrisieren und das Kurvenintegral durch

$$\int_{\partial\Sigma, T} Y \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} Y(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt$$

berechnen. Dabei muss man aber aufpassen, dass γ die richtige Orientierung induziert, also $\|\dot\gamma\|^{-1}\dot\gamma$ mit T übereinstimmt, was für die Parametrisierung oben der Fall ist.

(c) Wir suchen zuerst ein Vektorfeld Y, sodass

$$\nabla \times Y(x) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Es muss also gelten

$$\partial_{x_1} Y^2 - \partial_{x_2} Y^1 = 1, \quad \partial_{x_3} Y^1 - \partial_{x_1} Y^3 = 0, \quad \partial_{x_2} Y^3 - \partial_{x_3} Y^2 = 0.$$

Die erste Gleichung ist zum Beispiel erfüllt durch $Y_2(x) = x_1$ und $Y^1(x) = 0$. Wir sehen dann, dass mit $Y^3(x) = 0$ alle Gleichungen erfüllt sind, also setzen wir

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laut dem Satz von Stokes gilt nun

$$\int_{\Sigma,\nu} e_3 \cdot d\mathbf{A} = \int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times Y) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial\Sigma} Y \cdot T\, ds,$$

wobei T die durch ν induzierte Orientierung auf dem Rand $\partial\Sigma$ ist. Wir finden

$$Y(x) \cdot T(x) = \frac{1}{r_0} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_0} x_1^2.$$

Wir parametrisieren $\partial\Sigma$ wie oben und finden

$$\int_{\partial\Sigma} Y \cdot T\, ds = \int_0^{2\pi} Y(\gamma(t)) \cdot T(\gamma(t)) \|\dot\gamma(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} r_0^2 \cos(t)^2\, dt = \pi r_0^2,$$

was natürlich mit der Berechnung ohne Satz von Stokes übereinstimmt.

9.2. Satz von Gauß.

(a) Die Divergenz von X lautet

$$\nabla \cdot X(x) = \partial_{x_1} X^1(x) + \partial_{x_2} X^2(x) = \partial_{x_1}(x_1^2 - x_2^2) + \partial_{x_2}(x_1^2 + x_2^2) = 2x_1 + 2x_2.$$

(b) Der Rand des Kreisrings $U = B_2^2 \setminus \overline{B}_1^2$ besteht aus zwei Komponenten:

$$\partial U = \partial B_2^2 \cup \partial B_1^2,$$

also ∂U ist die disjunkte Vereinigung der beiden Kreise mit Radius 1 und 2. Die Menge U liegt zwischen diesen Kreisen. Demnach ist ein nach aussen weisendes Einheitsnormalvektorfeld gegeben durch

$$\nu : \partial B_2^2 \cup \partial B_1^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{falls} \quad x \in \partial B_2^2 \\ -x, & \text{falls} \quad x \in \partial B_1^2 \end{cases}.$$

(c) Es gilt

$$\int_{\partial U, \nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial U} X \cdot \nu \, dA = \int_{\partial B_2^2} X \cdot \nu \, dA + \int_{\partial B_1^2} X \cdot \nu \, dA.$$

Wir parametrisieren die beiden Kreise wie folgt

$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \partial B_1^2, \quad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$
$$\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \partial B_2^2, \quad \gamma_2(t) = 2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\|\dot{\gamma}_1(t)\| = 1, \quad \|\dot{\gamma}_1(t)\| = 2.$$

und

$$X(\gamma_1(t)) = \begin{pmatrix} \cos^2(t) - \sin^2(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X(\gamma_2(t)) = 4 \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Laut einer Proposition in den Notizen von F. Ziltener (Integral über Untermannigfaltigkeit) kommt in den Integralen oben die Wurzel der Gramschen Determinante vor, also $\sqrt{\det(d\gamma(t)^T d\gamma(t))}$. Da $d\gamma(t) = \dot{\gamma}(t)$ einfach ein Vektor ist, gilt

$$d\gamma(t)^T d\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|^2.$$

Die Determinante dieser 1×1 Matrix ist einfach die Zahl selbst und die Wurzel ergibt die Norm von $\dot{\gamma}(t)$. Die Integrale oben sind also einfach Kurvenintegrale.

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial U,\nu} X \cdot d\mathbf{A} &= \int_{\partial B_2^2} X \cdot \nu \, dA + \int_{\partial B_1^2} X \cdot \nu \, dA \\
&= \int_0^{2\pi} X(\gamma_2(t)) \cdot \nu(\gamma_2(t)) \|\dot{\gamma}_2(t)\| \, dt + \int_0^{2\pi} X(\gamma_1(t)) \cdot \nu(\gamma_1(t)) \|\dot{\gamma}_1(t)\| \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4 \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} 2 \, dt + \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4(\cos(2t)\cos(t) + \sin(t)) \, dt - \int_0^{2\pi} (\cos(2t)\cos(t) + \sin(t)) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 3(\cos(2t)\cos(t) + \sin(t)) \, dt = 0.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Additionsformeln für Cosinus und Sinus verwendet, um $\cos(2t)\cos(t) = \frac{1}{2}(\cos(3t) + \cos(t))$ zu schreiben. Die Integrale von $\sin(t)$, $\cos(t)$ und $\cos(3t)$ über $[0, \pi]$ verschwinden alle.

(d) Laut dem Satz von Gauß (siehe Vorlesung) gilt

$$\int_{\partial U,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_U \nabla \cdot X \, dx.$$

Wir haben $\nabla \cdot X$ bereits berechnet und finden

$$\int_U \nabla \cdot X \, dx = \int_{B_2^2 \setminus \overline{B}_1^2} (2x_1 + 2x_2) \, dx = 0.$$

Wobei das Verschwinden des letzten Integrals mittels Symmetrie-Argumenten folgt, oder mittels Polarkoordinaten:

$$\int_{B_2^2 \setminus \overline{B}_1^2} (2x_1 + 2x_2) \, dx = \int_1^2 \int_0^{2\pi} (2r^2 \cos(\phi) + 2r^2 \sin(\phi)) \, d\phi dr = 0,$$

da die Integrale von Sinus und Cosinus über $[0, 2\pi]$ verschwinden.

9.3. Vektoranalytische Identitäten.

Die Identitäten lassen sich alle durch direktes Rechnen bestimmen, wobei jeweils die Reihenfolge partieller Differentiation vertauscht werden darf (Satz von Schwarz). Wir schreiben einfachheitshalber $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$.

(a)

$$\nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2\partial_3 f - \partial_3\partial_2 f \\ \partial_3\partial_1 f - \partial_1\partial_3 f \\ \partial_1\partial_2 f - \partial_2\partial_1 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} = \partial_1\partial_1 f + \partial_2\partial_2 f + \partial_3\partial_3 f = \Delta f$$

(c)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times X) &= \nabla \cdot \begin{pmatrix} \partial_2 X^3 - \partial_3 X^2 \\ \partial_3 X^1 - \partial_1 X^3 \\ \partial_1 X^2 - \partial_2 X^1 \end{pmatrix} \\ &= \partial_1(\partial_2 X^3 - \partial_3 X^2) + \partial_2(\partial_3 X^1 - \partial_1 X^3) + \partial_3(\partial_1 X^2 - \partial_2 X^1) = 0 \end{aligned}$$

(d) Wir berechnen beide Seiten separat:

$$\nabla \times (\nabla \times X) = \nabla \times \begin{pmatrix} \partial_2 X^3 - \partial_3 X^2 \\ \partial_3 X^1 - \partial_1 X^3 \\ \partial_1 X^2 - \partial_2 X^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2(\partial_1 X^2 - \partial_2 X^1) - \partial_3(\partial_3 X^1 - \partial_1 X^3) \\ \partial_3(\partial_2 X^3 - \partial_3 X^2) - \partial_1(\partial_1 X^2 - \partial_2 X^1) \\ \partial_1(\partial_3 X^1 - \partial_1 X^3) - \partial_2(\partial_2 X^3 - \partial_3 X^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot X) - \Delta X &= \nabla(\partial_1 X^1 + \partial_2 X^2 + \partial_3 X^3) - (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1(\partial_1 X^1 + \partial_2 X^2 + \partial_3 X^3) \\ \partial_2(\partial_1 X^1 + \partial_2 X^2 + \partial_3 X^3) \\ \partial_3(\partial_1 X^1 + \partial_2 X^2 + \partial_3 X^3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_1^2 X^1 + \partial_2^2 X^1 + \partial_3^2 X^1 \\ \partial_1^2 X^2 + \partial_2^2 X^2 + \partial_3^2 X^2 \\ \partial_1^2 X^3 + \partial_2^2 X^3 + \partial_3^2 X^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1\partial_2 X^2 + \partial_1\partial_3 X^3 - \partial_2^2 X^1 - \partial_3^2 X^1 \\ \partial_2\partial_1 X^1 + \partial_2\partial_3 X^3 - \partial_1^2 X^2 - \partial_3^2 X^2 \\ \partial_3\partial_1 X^1 + \partial_3\partial_2 X^2 - \partial_1^2 X^3 - \partial_2^2 X^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Durch Vergleichen sehen wir, dass beide Seiten gleich sind.

9.4. Faradaysches Induktionsgesetz, Maxwellgleichung, Satz von Stokes.

Dies folgt aus dem Satz von Stokes. Wir nehmen an, dass das elektrische und das magnetische Feld Funktionen der Klasse C^1 sind:

$$E, B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Die zeitliche Veränderung des Flusses von B durch Σ ist

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma,\nu} B \cdot d\mathbf{A}.$$

Die Zirkulation von E durch $\partial\Sigma$ ist gegeben durch das Kurvenintegral

$$\int_{\partial\Sigma,T} E \cdot d\mathbf{s}.$$

Das Faradaysche Induktionsgesetz besagt also

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma,\nu} B \cdot d\mathbf{A} = -\int_{\partial\Sigma,T} E \cdot d\mathbf{s}.$$

Dank dem Satz von Stokes gilt

$$\int_{\partial\Sigma,T} E \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times E) \cdot d\mathbf{A}.$$

Des Weiteren können wir für das magnetische Feld die zeitliche Ableitung mit dem Integral über Σ vertauschen. Wir finden also

$$\int_{\Sigma,\nu} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = -\int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times E) \cdot d\mathbf{A}.$$

Da dies für jede Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, müssen die Integranden gleich sein, also

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E.$$

9.5. Coulomb-Gesetz.

Der Einheitsvektor, der von x_0 nach x zeigt ist $\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$. Prinzip (i) impliziert also, dass es eine Funktion $\Phi : \{(x_0, x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,|\, x \neq x_0\} \to \mathbb{R}$ gibt (die beiden Ladungen sollten nicht am selben Punkt sein), sodass

$$F = Qq\Phi(x, x_0)\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}.$$

Prinzip (iii) impliziert, dass für alle Vektoren $V \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\Phi(x + v, x_0 + v) = \Phi(x, x_0).$$

Somit gilt

$$\Phi(x, x_0) = \Phi(x - x_0, 0) = \phi(x - x_0),$$

für eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Die Invarianz unter Rotationen, Prinzip (iv), impliziert, dass die Funktion ϕ nur von der Norm des Vektors abhängen kann, also $\phi(x - x_0) = f(\|x - x_0\|)$ für eine Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Wir können also die Kraft wie folgt schreiben:

$$F = Qqf(\|x - x_0\|)\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}.$$

Wir bestimmen nun die Form der Funktion f mittels dem Satz von Gauß und Prinzip (ii). Wegen der Translationsinvarianz können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_0 = 0$, also die Ladung Q liegt im Ursprung. Sei $r > 0$ beliebig. Wir berechnen den Fluss von F durch die Kugeloberfläche ∂B_r^3, wobei wir als Koorientierung $\nu(x) = \frac{x}{\|x\|}$ verwenden:

$$\int_{\partial B_r^3, \nu} F \cdot d\mathbf{A} = Qq \int_{\partial B_r^3} f(\|x\|)\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{x}{\|x\|}\, dA = Qqf(r) \int_{\partial B_r^3} 1\, dA = 4\pi Qqr^2 f(r),$$

wobei wir verwendet haben, dass f entalang der Kugeloberfläche konstant ist und der Flächeninhalt gegeben ist durch $4\pi r^2$. Wir betrachten nun das Gebiet $U = B_{r_2}^3 \setminus \overline{B}_{r_1}^3$, wobei $0 < r_1 < r_2$. Der Punkt $x_0 = 0$ liegt nicht in U, also besagt Prinzip (ii), dass $\nabla \cdot X = 0$ überall in U. Der Rand von U ist gegeben durch die beiden Kugeloberflächen $\partial B_{r_1}^3$ und $\partial B_{r_2}^3$, wobei ν die induzierte Koorientierung auf $\partial B_{r_2}^3$ ist und $-\nu$ auf $\partial B_{r_1}^3$. Somit gilt laut dem Satz von Gauß:

$$0 = \int_U \nabla \cdot F\, dx = \int_{\partial B_{r_2}^3, \nu} F \cdot d\mathbf{A} - \int_{\partial B_{r_2}^3, \nu} F \cdot d\mathbf{A} = 4\pi Qq(r_2^2 f(r_2) - r_1^2 f(r_1)).$$

Für beliebige r_1, r_2 muss also gelten

$$r_1^2 f(r_1) = r_2^2 f(r_2).$$

Somit finden wir

$$f(r) = \frac{f(1)}{r^2},$$

wobei $f(1)$ irgendeine Konstante ist. Eingesetzt in unsere Formel für F ergibt dies:

$$F = f(1)Qq\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^2},$$

und für den Betrag der Kraft:

$$\|F\| = \frac{|f(1)Qq|}{\|x - x_0\|^2}.$$

Bemerkung: Die Konstante wird geschrieben als $f(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, wobei ϵ_0 die sogenannte elektrische Feldkonstante ist.