10.1. Partielle Ableitungen.

(a) $u_{x_1}(x) = x_2^2$, $u_{x_2}(x) = 2x_1x_2$, $u_{x_1x_1}(x) = 0$, $u_{x_1x_2}(x) = u_{x_2x_1}(x) = 2x_2$, $u_{x_2x_2}(x) = 2x_1$

(b) gleiche Lösung wie (a), wobei wir überall x_1, x_2 durch x, y und das Argument x durch (x, y) ersetzen, also zum Beispiel $u_x(x, y) = y^2$

10.2. GDG (gewöhnliche Differentialgleichungen).

GDG	Ordnung	linear?	homogen?	allgemeine Lösung
(a) $u'(x) = x^2$	1	ja	nein	$u(x) = \frac{x^3}{3} + c$
(b) $u' - 2u = 0$	1	ja	ja	$u(x) = ce^{2x}$
(c) $u' = u^2$	1	nein		$u(x) = -\frac{1}{x+c}$ und $u \equiv 0$
(d) $u'' - 5u' = -6u$	2	ja	ja	$u(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$
(e) $u'(x) - 2u(x) = e^{2x}$	1	ja	nein	$u(x) = (c + x)e^{2x}$

Erklärungen zu dieser Tabelle: Wir wiederholen kurz die Definitionen. Die Ordnung einer GDG is gegeben durch die Ordnung der höchste Ableitung der gesuchten Funktion, welche in der GDG vorkommt. In der GDG **(d)** ist zum Beispiel die höchste Ableitung der gesuchten Funktion u'', also hat die GDG Ordnung 2.

Eine GDG ist linear, wenn sie eine Linearkombination der Funktion und deren Ableitungen ist. Dies ist zum Beispiel der Fall für die GDG $u' - 2u = 0$, aber nicht für die GDG $u' = u^2$.

Wir nennen eine lineare GDG homogen, falls die Störfunktion gleich 0 ist. Dies ist zum Beispiel der Fall bei der GDG $u'' - 5u' = -6u$. Die GDG $u'(x) - 2u(x) = e^{2x}$ ist jedoch nicht homogen, da das Störglied e^{2x} nicht gleich 0 ist.

Wir lösen jetzt die gegebenen GDG. Wir nehmen an, dass u die GDG **(a)** löst. Wir schreiben $C := u(0)$. Durch Integrieren ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_0^x u'(t)dt + C \qquad \text{(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)}\\
&= \int_0^x t^2 dt + C \qquad \text{(weil } u \text{ die GDG löst)}\\
&= \frac{t^3}{3}\Big|_{t=0}^x + C\\
&= \frac{x^3}{3} + C.
\end{aligned}$$

Tatsächlich löst die Funktion $u(x) = \frac{x^3}{3} + C$ die GDG $u'(x) = x^2$ für alle $C \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass das die allgemeine Lösung dieser GDG ist.

Wie Sie in Analysis 2 gelernt haben, ist die allgemeine Lösung der GDG **(b)** durch die Funktion $u(x) = ce^{2x}$ gegeben, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. (Überprüfen Sie, dass diese Funktion die GDG löst. Dass dies die einzige Lösung ist, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf. (Siehe das Skript zur Vorlesung Analysis 1 und 2 von Prof. Struwe.)

Wir lösen jetzt die GDG **(e)**,

$$u'(x) - 2u(x) = e^{2x}.$$

Die allgemeine Lösung kann dargestellt werden als $u = u_{\text{hom}} + u_{\text{part}}$, wobei u_{hom} die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und u_{part} eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung bezeichnet. Die zugehörige homogene Gleichung ist $u'(x) - 2u(x) = 0$, also **(b)**. Wie wir soeben gesehen haben, ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung gegeben durch

$$u_{\text{hom}}(x) = ce^{2x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Wir suchen nun nach einer partikulären Lösung u_{part} der inhomogenen Gleichung **(e)** mit dem Ansatz der Variation der Konstanten: Angenommen $u_{\text{part}}(x) = c(x)e^{2x}$ löst diese Gleichung für eine Funktion c. Wir berechnen

$$u'_{\text{part}}(x) = c'(x)e^{2x} + 2c(x)e^{2x} = \big(c'(x) + 2c(x)\big)e^{2x}.$$

Einsetzen in die Gleichung **(e)** ergibt

$$\big(c'(x) + 2c(x)\big)e^{2x} - 2c(x)e^{2x} = e^{2x}.$$

Dies lässt sich zu $c'(x) = 1$ umformen. Also gilt $c(x) = x + C$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Wir wählen $C = 0$ und erhalten

$$u_{\text{part}}(x) = xe^{2x}.$$

Diese Funktion löst tatsächlich die inhomogene Gleichung **(e)**. (Rechnen Sie das nach!) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung **(e)** ist daher gegeben durch

$$u(x) = h_{\text{hom}}(x) + u_{\text{part}}(x) = (c + x)e^{2x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Die GDG **(c)** lässt sich durch Separation der Variablen lösen. (Tun Sie das!)

Zum Schluss lösen wir noch die GDG **(d)**. Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist gegeben durch $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$. Die Nullstellen sind $\lambda_1 = 2$ und

$\lambda_2 = 3$. Wie Sie in Analysis 2 gelernt haben, folgt hieraus, dass die allgemeine Lösung der GDG gegeben ist durch

$$u(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \qquad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

10.3. Lösungsmenge einer GDG. (a), $u'(x) = x^2$: Lösungsmenge $= \left\{ u+c \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}$, wobei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) := \frac{x^3}{3}$

(d), $u'' - 5u' = -6u$: Lösungsmenge $= \left\{ c_1 u_1 + c_2 u_2 \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$, wobei $u_1, u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u_1(x) := e^{2x}$, $u_2(x) := e^{3x}$

10.4. Partielle Differentialgleichungen.

PDG	Ordnung	linear?	homogen?
(a) $u_x(x,y) = x u_{yy}(x,y)$	2	ja	ja
(b) $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y} u(x,y) - x = 0$	2	ja	nein
(c) $u \partial_x u = 0$	1	nein	
(d) $\Delta\Delta u = u$	4	ja	ja

Erklärungen zu dieser Tabelle: Wir wiederholen kurz die Definitionen. Die Ordnung einer PDG is gegeben durch die Ordnung der höchsten Ableitung der gesuchten Funktion, welche in der PDG vorkommt. Zum Beispiel können wir die PDG **(d)** schreiben als

$$\begin{aligned} u &= \Delta\Delta u \\ &= \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 u \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}^2 \partial_{x_j}^2 u. \end{aligned}$$

Die höchsten Ableitungen sind hier von Ordnung 4. Somit hat die PDG Ordnung 4.

Eine PDG ist linear g. d. w. [1] wir sie durch Verschieben von Termen in die folgende Form bringen können:

$$\begin{pmatrix} \text{endliche Summe von Produkten der Form:} \\ \text{Funktion von } x \text{ mal } u \text{ oder (höhere) partielle Ableitung von } u \end{pmatrix} = f(x).$$

[1] genau dann, wenn

Das ist der Fall für die PDG **(a,b,d)**. Wir nennen eine lineare PDG homogen, falls die Störfunktion f gleich 0 ist. Dies ist der Fall bei den PDG **(a,d)**.

10.5. Transportgleichung.

(i) Wir fixieren einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und definieren die Funktionen

$$\widetilde{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{u}(t) := u(t,x) = g(x - tv), \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad f(t) := x - tv.$$

Wir haben

$$\widetilde{u} = g \circ f. \tag{1}$$

Gemäss der Definition der partiellen Ableitung gilt

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \widetilde{u}'(t) \\ &= \nabla g(f(t)) \cdot f'(t) \qquad \text{(wegen (1) und der Kettenregel)} \\ &= \nabla g(x - tv) \cdot (-v). \end{aligned} \tag{2}$$

Wir zeigen, dass für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$u_{x_i}(t,x) = g_{x_i}(x - tv). \tag{3}$$

Dazu betrachten wir zuerst den Fall $i = 1$. Wir fixieren $t, x_2, \ldots, x_n$ und definieren die Funktionen

$$\widetilde{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{u}(z) := u\big(t, z, x_2, \ldots, x_n\big) = g\big(z - tv_1, x_2 - tv_2, \ldots, x_n - tv_n\big), \tag{4}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad f(z) := \big(z - tv_1, x_2 - tv_2, \ldots, x_n - tv_n\big). \tag{5}$$

Wir haben

$$\widetilde{u} = g \circ f. \tag{6}$$

Gemäss der Definition der partiellen Ableitung gilt

$$\begin{aligned} u_{x_1}(t,x) &= \widetilde{u}'(x_1) \\ &= \nabla g(f(x_1)) \cdot f'(x_1) \qquad \text{(wegen (6) und der Kettenregel)} \\ &= \nabla g(x - tv) \cdot \big(1, 0, \ldots, 0\big) \\ &= g_{x_1}(x - tv). \end{aligned}$$

D. h. , (3) gilt für $i = 1$. Eine analoge Rechnung zeigt, dass das für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt. Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \nabla u(t,x) :&= \big(u_{x_1}(t,x), \ldots, u_{x_n}(t,x)\big) \\ &= \nabla g(x - tv). \end{aligned}$$

Indem wir das mit (2) kombinieren, erhalten wir

$$u_t(t,x) + v \cdot \nabla u(t,x) = -v \cdot \nabla g(x - tv) + v \cdot \nabla g(x - tv) = 0.$$

Also löst die Funktion u die Transportgleichung, wie behauptet.

Einfachere Herleitung von (3)**:** Wir betrachten zuerst den Fall $i = 1$. Wir fixieren $t, x_2, \ldots, x_n$ und definieren die Funktion $\widetilde{u}$ wie in (4) und

$$\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{g}(y) := g\big(y, x_2 - tv_2, \ldots, x_n - tv_n\big),$$
$$\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{f}(z) := z - tv_1.$$

(Die Funktion $\widetilde{f}$ ist ähnlich wie f definiert (siehe (5)), aber nimmt Werte in $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{R}^n$ an.) Wir haben

$$\widetilde{u} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}. \tag{7}$$

Gemäss der Definition der partiellen Ableitung gilt

$$\begin{aligned} u_{x_1}(t,x) &= \widetilde{u}'(x_1) \\ &= \widetilde{g}'(f(x_1)) \cdot \widetilde{f}'(x_1) \qquad \text{(wegen (7) und der Kettenregel)} \\ &= \widetilde{g}'(x - tv) \cdot 1 \\ &= g_{x_1}(x - tv). \end{aligned}$$

D. h. , (3) gilt für $i = 1$. Eine analoge Rechnung zeigt, dass das für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Bemerkung: Der Vorteil dieser Herleitung von (3) ist, dass wir weniger rechnen müssen, da die Funktion $\widetilde{f}$ nur eine Komponente hat, statt n wie f. Andererseits entspricht die Herleitung mit f der Standardmethode. Die Methode mit $\widetilde{f}$ funktioniert nur, falls die betrachtete Variable (x_1) in der Definition von u nur in einem Argument von g vorkommt. (In unserem Fall ist das das erste Argument.)

(ii) Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. (Wir werden später g geeignet wählen.) Wir definieren die Funktion u durch

$$u(t,x) := g\left(x - t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right), \qquad \text{für } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^3.$$

Gemäss (i) löst diese Funktion die Transportgleichung

$$u_t(t,x) + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \nabla u(t,x) = 0.$$

Die gewünschte Anfangsbedingung ist

$$u\big(t = 0, x\big) = x_1.$$

Die linke Seite ist gleich $g(x)$. Wenn wir daher

$$g(x) := x_1$$

wählen, dann löst u die Anfangsbedingung. Wir erhalten also die Lösung

$$u(t,x) = \left(x - t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)_1 = x_1 - t.$$

10.6. Inhomogene Laplacegleichung in einer Dimension.

(i) Da $n = 1$ ist, haben wir $\Delta u = u''$. Die Laplacegleichung lautet also $u'' = 0$. Die allgemeine Lösung dieser GDG ist $u(x) = c_1 x + c_0$.

(ii) Wir haben $\nabla u(x) = u'(x) = c_1$. Die Randbedingungen $\nabla u(-1) = 0$, $\nabla u(1) = 0$ bedeuten daher, dass $c_1 = 0$. Die Bedingung

$$\int_{-1}^{1} u(x)\,dx = 2$$

besagt daher, dass $2c_0 = \int_{-1}^{1} c_0\,dx = 2$, d. h. $c_0 = 1$. Die eindeutige Lösung der Laplacegleichung, die die Randbedingungen und die Integralbedingung erfüllt, ist daher $u \equiv 1$.

10.7. Maxwell-Gleichungen im Vakuum, Wellengleichung. Wir definieren

$$c := (\varepsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

(i) Wir benötigen Folgendes.

Bemerkung 1. [vektoranalytische Identität] Für jedes $X \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\nabla \times (\nabla \times X) = \nabla(\nabla \cdot X) - \Delta X.$$

(Siehe Übungsserie 9. Der Laplace-Operator wird hier auf jede Komponente von X angewendet.)

Aus dem Faradayschen Induktionsgesetz folgt, dass

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 \mathbf{B} &= -\partial_t \nabla \times \mathbf{E} \\
&= -\nabla \times \partial_t \mathbf{E} \qquad \text{(gemäss dem Satz von Schwarz)} \\
&= -(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \qquad \text{(Ampèresches Gesetz, } \mathbf{j} = 0\text{)} \\
&= c^2 \big(-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \Delta \mathbf{B} \big) \qquad \text{(gemäss Bemerkung 1)} \\
&= 0 + c^2 \Delta \mathbf{B} \qquad \text{(gemäss dem Gaußschen Gesetz für } \mathbf{B}\text{)}
\end{aligned}$$

Also löst $\mathbf{B}$ die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 \Delta u$.

(ii) $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$.

(iii) $c \approx 299'792'458\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$. Das ist gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Licht ist eine elektromagnetische Strahlung. (Manchmal wird nur der sichtbare Teil dieser Strahlung "Licht" genannt.) Dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit für die hergeleitete Wellengleichung gerade die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist, ist daher kein Zufall.

10.8. Superpositionsprinzip und Wärmeleitungsgleichung.

(i) Sei $u(t,x) := e^{-\xi^2 t} \sin(\xi x)$. Wir rechnen nach:

$$u_t(t,x) = -\xi^2 e^{-\xi^2 t} \sin(\xi x)$$

und

$$\Delta u(t,x) = \Big(e^{-\xi^2 t} \xi \cos(\xi x) \Big)_x = e^{-\xi^2 t} \xi^2 \big(-\sin(\xi x) \big).$$

Nun sehen wir, dass $u_t = \Delta u$.

(ii) Die Wärmeleitungsgleichung ist linear und homogen, da wir sie durch Verschieben des Terms Δu nach links in die folgende Form bringen können:

$$\begin{pmatrix} \text{endliche Summe von Produkten der Form:} \\ \text{Funktion von } x \text{ mal } u \text{ oder (höhere) partielle Ableitung von } u \end{pmatrix} = 0.$$

(Prüfen Sie das nach!) Da u^{ξ_1} und u^{ξ_2} die Wärmeleitungsgleichung lösen, gilt daher aufgrund des Superpositionsprinzips, dass die Summe $u := a_1 u^{\xi_1} + a_2 u^{\xi_2}$ diese Gleichung ebenfalls löst. (Überprüfen Sie das auch noch direkt, indem Sie die Funktion u in die Wärmeleitungsgleichung einsetzen und verwenden, das u^{ξ_i} diese Gleichung löst!)

(iii) Nein. Grund: Die Funktion

$$u(x) := -\frac{1}{x_1}$$

löst die PDG

$$u_{x_1} = u^2. \tag{9}$$

(Rechnen Sie das nach!) Für $a \in \mathbb{R}$ löst au die PDG (9) nur in den Fällen $a = 0$ und $a = 1$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}(au)^2 &= a^2 u^2 \\ &= a^2 u_{x_1} \qquad \text{(da } u \text{ die PDG (9) löst)} \\ &= a(au)_{x_1}.\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist genau dann gleich $(au)_{x_1}$, wenn $a = 0$ oder $a = 1$ ist. Das bedeutet, dass au die PDG (9) nur in diesen zwei Fällen löst. Daher gilt das Superpositionsprinzip für die PDG (9) nicht.

Bemerkungen:

- Das Superpositionsprinzip gilt für lineare Differentialgleichungen.
- Die PDG (9) ist nichtlinear.