Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (∗) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

1.1. (∗) Inhomogene Differentialgleichungen, partikuläre Lösung, Superpositionsprinzip

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$2y'' + 3y' + 10y = 1.$$

Hinweis: Versuchen Sie, eine konstante Lösung als partikuläre Lösung zu finden.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x).$$

Hinweis: Versuchen Sie, eine Lösung der Form $A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)$ als partikuläre Lösung zu finden.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Superpositionsprinzip, um eine partikuläre Lösung zu finden.

1.2. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems für eine gewöhnliche Differentialgleichung

1. Besitzt das Anfangswertproblem

   $$\ddot{f}(t) = tf(t),\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(0) = 1, \qquad \dot{f}(0) = 0$$

   eine Lösung?

2. Ist die Lösung eindeutig (falls sie existiert)?

Begründen Sie Ihre Antworten in einem Satz.

1.3. Umwandeln von Differentialgleichungen höherer Ordnung in ein System von GDG erster Ordnung

Schreiben Sie die folgenden Differentialgleichungen 2. und 3. Ordnung als Differentialgleichungen 1. Ordnung unter Verwendung vektorwertiger Funktionen:

(a) **(∗)** $y'' + y' - 2y = 0$; **(b)** $y''' - 4y'' = 0$.

1.4. Fundamentallösungen für 2×2-Matrizen, Anfangswertproblem

1. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen die Fundamentallösung der Differentialgleichung für stetig differenzierbares $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$\frac{dF(t)}{dt} = AF(t)$$

   (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

   (b) **(∗)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

2. **(∗)** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{F} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} F, \qquad F(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y'' + y = 0$$

Der Exponentialansatz liefert die folgenden Lösungen:

(i) e^{it}, e^{-it}

(ii) e^t, e^{-t}

(iii) $\cos(t), \sin(t)$

(iv) $\cosh(t), \sinh(t)$

(b) Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y'' - y = 0$$

Der Exponentialansatz liefert die folgenden Lösungen:

(i) e^{it}, e^{-it}

(ii) e^t, e^{-t}

(iii) $\cos(t), \sin(t)$

(iv) $\cosh(t), \sinh(t)$

(c) Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Der Exponentialansatz liefert die folgenden Lösungen:

(i) e^{-t}, aber te^{-t} ist auch eine Lösung.

(ii) e^t, aber te^t ist auch eine Lösung.

(iii) e^t, e^{-t}

(iv) e^t ist die einzige Lösung bis auf Multiplikation mit einer Konstanten.

(d) Betrachten Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y'' + 3y' + 9y = 0$$

mit den Anfangswerten $y(0) = u_0 > 0$ und $y'(0) = v_0 > 0$. Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

(i) Das System schwingt mit einer konstanten Amplitude.

(ii) Das System schwingt mit einer abnehmenden Amplitude.

(iii) Das System schwingt mit einer Frequenz, die geringer als die Eigenfrequenz (des ungedämpften Systems) ist.

(iv) Das System wird nach einer bestimmten Zeit ohne zu schwingen ins Gleichgewicht zurückkehren.

(e) Betrachten Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

mit den Anfangswerten $y(0) = u_0 > 0$ und $y'(0) = v_0 > 0$. Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

(i) Das System schwingt mit einer konstanten Amplitude.

(ii) Das System schwingt mit einer abnehmenden Amplitude.

(iii) Das System schwingt mit einer Frequenz, die geringer als die Eigenfrequenz (des ungedämpften Systems) ist.

(iv) Das System wird nach einer bestimmten Zeit ohne zu schwingen ins Gleichgewicht zurückkehren.