Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (∗) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

2.1. Partielle Ableitungen, Jacobi-Matrix.

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen

1. die partielle Ableitung nach jeder Variable im angegebenen Punkt p,
2. die Jacobi-Matrix im angegebenen Punkt p.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad (x_i := i\text{-te Koordinate von } x), \quad p := \big(1, 0, \ldots, 0\big)$$

(∗) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x, y) := xy^2, \qquad p := (1, 1)$

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad h(x, y) := \begin{pmatrix} xy^2 \\ e^{xy} \\ x^3 \end{pmatrix}, \qquad p := (1, 1)$$

Bemerkung: Diese Abbildungen sind partiell differenzierbar (nach allen Variablen und in jedem Punkt). (Das folgt aus Analysis 1.) Daher ist es sinnvoll, die partiellen Ableitungen zu berechnen.

2.2. (∗) (Totale) Differenzierbarkeit und (totale) Ableitung.

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(y) := y_1 y_2$$

(total) differenzierbar ist mit (totaler) Ableitung im Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch die lineare Abbildung

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad Av := p_2 v_1 + p_1 v_2.$$

Tipps:

1. Zeigen Sie, dass für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt
$$g(p + v) - g(p) - Av = v_1 v_2.$$
2. Verwenden Sie die Youngsche Ungleichung aus Analysis 1:
$$2|v_1 v_2| \leq v_1^2 + v_2^2, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

2.3. (∗) Kettenregel.

Wir betrachten die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ e^{x_2} \end{pmatrix}, \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(y) := y_1 y_2, \quad h := g \circ f.$$

1. Bestimmen Sie Definitions- und Zielbereich[1] von h. Berechnen Sie h.
2. Sei $p \in \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass h im Punkt p (total) differenzierbar ist.

   Bemerkung: Sie dürfen verwenden, dass die Funktion f differenzierbar ist[2].

   Tipps:

   a) Verwenden Sie die Kettenregel.

   b) Verwenden Sie Aufgabe 2.2.
3. Berechnen Sie die Ableitung von h im Punkt $p = (2, 0)$ mittels der Kettenregel. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit der Multiplikation mit der Jacobi-Matrix von h im Punkt $p = (2, 0)$. Diese Matrix haben wir in einem Beispiel in der Vorlesung berechnet. Was stellen Sie fest?

2.4. Differenzierbarkeit und Ableitung der Norm.

Wir betrachten die euklidische Norm ausserhalb des Ursprungs, also die Funktion

$$h := \|\cdot\| : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

($x_i :=$ i-te Koordinate von x)

1. Zeigen Sie, dass h (total) differenzierbar ist.

[1] Im Skript *Analysis für Informatik* von Prof. Michael Struwe wird dies der *Wertebereich* genannt.

[2] Beweis davon: Die Funktion $x \mapsto x_1$ ist linear und daher differenzierbar. (Siehe Vorlesung.) Die Funktion $x \mapsto e^{x_2}$ ist differenzierbar. Das folgt aus der Definition der totalen Differenzierbarkeit und der Tatsache, dass exp differenzierbar ist. Die Komponenten der Abbildung f sind also differenzierbar. Gemäss einer Bemerkung in der Vorlesung ist f daher ebenfalls differenzierbar.

Tipps:

a) Finden Sie zwei Funktionen f und g, sodass h die Verknüpfung $g \circ f$ ist.

b) Verwenden Sie die Kettenregel und die Tatsache, dass f und g (total) differenzierbar sind.

Bemerkung: f ist ein Polynom auf $\mathbb{R}^n$ und daher differenzierbar. Ein *Polynom auf* $\mathbb{R}^n$ ist eine endliche Linearkombination von Funktionen der Form

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$. Jedes Polynom auf $\mathbb{R}^n$ ist (total) differenzierbar ist. Sie dürfen das ohne Beweis verwenden.

2. Berechnen Sie die (totale) Ableitung von h.

   Tipp: Verwenden Sie das Folgende:

   a) Kettenregel

   b) Ableitung = Multiplikation mit der Jacobi-Matrix

   c) Jacobi-Matrix der Funktion f aus Aufgabe 2.1

2.5. (∗) Gradient und steilster Anstieg.

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x_1^2 + 4x_2^2.$$

1. Sei $x \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\nabla f(x)$, den Gradienten von f im Punkt x. Zeichnen Sie $\nabla f(1,0)$.
2. Berechnen Sie die Richtung v des steilsten Anstiegs der Funktion im Punkt $(1,0)$. (Per definitionem hat v die euklidische Norm 1.)
3. Bestimmen Sie die Niveaulinie $f^{-1}(1)$. Fügen Sie diese Linie zu Ihrer Zeichnung hinzu.
4. Steht $\nabla f(1,0)$ senkrecht auf der Niveaulinie?

2.6. Richtungsableitung

1. **(∗)** Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

   $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x_1^2 + 4x_2^2$$

   im Punkt $(1,0)$ in die Richtungen $(1,0)$ und $(0,1)$.

2. Fügen Sie diese beiden Vektoren zu Ihrer Zeichnung zur Aufgabe 2.5 hinzu.

   Vergleichen Sie die beiden Richtungsableitungen mit Ihren Resultaten aus Aufgabe 2.5. Was fällt Ihnen auf?

2.7. Wegintegral eines Vektorfeldes.

Wir definieren das *Euler-Vektorfeld auf* $\mathbb{R}^2$ als die Identitätsabbildung

$$X := \mathrm{id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathrm{id}(x) := x.$$

Wir betrachten den Weg in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) := (\cos t, \sin t).$$

(a) Zeichnen Sie X und γ.

(b) **(∗)** Berechnen Sie $\int X \cdot d\gamma$, das Wegintegral von X längs γ.

2.8. Konservativität eines Vektorfeldes, Potential.

Tun Sie für jedes der unteren Vektorfelder X das Folgende:

(i) X zeichnen,

(ii) die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \int X \cdot d\gamma_x$$

berechnen, wobei

$$x_0 := 0, \qquad \gamma_x : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \qquad \gamma_x(t) := (1-t)x_0 + tx = tx.$$

(iii) das Gradientenfeld ∇f berechnen,

(iv) Entscheiden, ob f ein Potential für X ist und ob X konservativ ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

(b) **(∗)** $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

(c) $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_3 x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Potentiale eines konservativen Vektorfeldes).

Die nächste Aufgabe werden wir in Aufgabe 2.10 verwenden.

2.9. Einfacher Zusammenhang, Sternförmigkeit und Konvexität einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst *sternförmig* g. d. w. es einen Punkt $x_0 \in S$ gibt, sodass für jeden Punkt $x \in S$ und jedes $t \in [0,1]$ der Punkt $(1-t)x_0 + tx$ in S liegt.

(a) Zeichnen Sie eine sternförmige Menge.

(b) Zeigen Sie, dass jede konvexe Menge sternförmig ist.

(c) **(∗)** Zeichnen Sie eine sternförmige Menge, die nicht konvex ist. Erklären Sie, warum die Menge sternförmig, aber nicht konvex ist.

(d) Zeigen Sie, dass jede sternförmige Menge einfach zusammenhängend ist.

(e) Überlegen Sie sich auf anschauliche Weise, dass die Menge $S := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend ist.

(f) (schwierig:) Beweisen Sie, dass $S := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend ist.

Bemerkung: Sie dürfen die folgende Tatsache ohne Beweis verwenden. Wir bezeichnen mit $S^1 := S^1_1(0)$ den Einheitskreis (=Rand der Einheitskreisscheibe). Für jede stetige Abbildung $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gibt es eine stetige Abbildung $h : [0,1] \times S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, sodass

$$h(0,y) = \gamma(y),\ \forall y \in S^1, \qquad \Big(h^1(1,y), h^2(1,y)\Big) \neq (0,0),\ \forall y \in S^1.$$

Bemerkung: Im Gegensatz zu dieser Teilaufgabe ist die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ **nicht** einfach zusammenhängend.

2.10. Charakterisierung der Konservativität eines Vektorfeldes mittels partieller Ableitungen.

Tun Sie für jedes der unteren Vektorfelder das Folgende:

(i) Überprüfen, ob für jedes Paar von Indizes $i, j = 1, \ldots, n$ gilt (mit $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$):

$$D_i X^j = D_j X^i.$$

(ii) Entscheiden, ob das Vektorfeld konservativ ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie Teilschritt 2.(i) und möglicherweise Aufgabe 2.9 verwenden.

Tipp: Verwenden Sie auch einen Satz aus der Vorlesung (Charakterisierung der Konservativität mittels partieller Ableitungen, Integrabilitätsbedingung).

(iii) Mit Aufgabe 2.8 vergleichen (falls möglich).

(a) $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

(b) **(∗)** $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

(c) $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_3 x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

(d) $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := v \times x,$ wobei $v \in \mathbb{R}^3$ ein fester Vektor ist.

2.11. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wenn für eine Funktion f alle partiellen Ableitungen an einer Stelle (x, y) existieren, dann ist f dort auch differenzierbar.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(b) Wenn f an einer Stelle (x, y) differenzierbar ist, dann ist f dort auch stetig.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(c) Welches sind die korrekten partiellen Ableitungen der folgenden Funktion:

$$f(x, y) = x \sin(y)^2$$

(i) $\partial_x f(x, y) = \sin(y)^2, \partial_y f(x, y) = 2x \sin(y) \cos(y)$

(ii) $\partial_x f(x, y) = \sin(y)^2, \partial_y f(x, y) = x \cos(y)^2$

(iii) $\partial_x f(x, y) = \sin(y)^2, \partial_y f(x, y) = 2x \cos(y)^2$

(iv) Die partiellen Ableitungen existieren nicht überall.

(d) Welcher Ausdruck ist die Ableitung der folgenden Funktion an jeder Stelle:

$$f(x, y) = x \sin(y)^2$$

(i) $df(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(y)^2 & 2x \sin(y) \cos(y) \end{pmatrix}$

(ii) $df(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(y)^2 & x \cos(y)^2 \end{pmatrix}$

(iii) $df(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(y)^2 & 2x \cos(y)^2 \end{pmatrix}$

(iv) Das Differential existiert nicht überall.