Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

3.1. Rotation eines Vektorfeldes.

Tun Sie für jedes der unteren Vektorfelder das Folgende:

(i) Rotation berechnen,

(ii) mit der Teil (ii) einer Aufgabe aus Serie 2 (Charakterisierung der Konservativität mittels partieller Ableitungen) vergleichen.

(a) $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

(b) **(∗)** $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_3 x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

(c) $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := v \times x,$ wobei $v \in \mathbb{R}^3$ ein fester Vektor ist.

3.2. Nicht-konservatives Vektorfeld mit verschwindender Rotation auf nicht-einfach zusammenhängendem Gebiet.

Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \frac{1}{\|x\|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass X nicht konservativ ist.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Charakterisierung von *konservativ* für ein Vektorfeld mittels Wegintegrale).

(b) Berechnen Sie die (skalare) Rotation von X.

(c) Erklären Sie, warum die erste Teilaufgabe und das Resultat der zweiten Teilaufgabe einander nicht widersprechen.

3.3. (∗) Gemischte zweite Ableitungen.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := \exp\left(\frac{\sin(y^2)}{1 + y^4}\right).$$

Berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f.$$

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

Bemerkung: Sie dürfen verwenden, dass f glatt ist, d. h. beliebig oft stetig differenzierbar.

3.4. Taylor-Polynom.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{\|x\|^2}.$$

(a) **(∗)** Berechnen Sie für $k = 0, 1, 2, 3$ und $p = 0 \in \mathbb{R}^n$: $T_k f(\cdot, p)$, das Taylor-Polynom k-ter Ordnung von f um den Punkt p.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C \in [0, \infty)$ gibt, sodass für alle $x \in \overline{B}_1^n(0)$ gilt

$$\left| f(x) - 1 - \|x\|^2 \right| \leq C\|x\|^3.$$

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

Bemerkung: Sie dürfen verwenden, dass f glatt ist, d. h. beliebig oft stetig partiell differenzierbar.

3.5. Kritischer Punkt, Hesse-Matrix, striktes lokales Minimum/Maximum, Sattelpunkt.

1. Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen die kritischen Punkte.
2. Bestimmen Sie für jeden kritischen Punkt p der Funktion:
   (i) die Hesse-Matrix in p,
   (ii) ob die Hesse-Matrix in p positiv oder negativ definit ist,
   (iii) ob es sich um eine strikte lokale Minimalstelle / Maximalstelle oder einen Sattelpunkt handelt.

(a) **(∗)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := \frac{x^3}{3} - x + \frac{y^3}{3} - y$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := x^2 + xy + y^2$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := xy$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := e^{x^2+y^2}$

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := x^2 + y^4$

(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := x^2 - y^4$

3.6. (∗) Taylorpolynom, Multi-Index-Schreibweise.

(a) Wir betrachten

$$n = 3, \quad \alpha := (4, 0, 1) \in \mathbb{N}_0^3, \quad v := (2, -1, 3), \quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x) := x_1^5 x_2 x_3.$$

Berechnen Sie das Folgende:

$$\begin{aligned}
|\alpha| &:= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \qquad =: \text{Ordnung } (=: \text{Länge}) \text{ von } \alpha,\\
\alpha! &:= \alpha_1! \cdots \alpha_n!,\\
\binom{k}{\alpha} &:= \frac{k!}{\alpha!} \qquad (\text{für } k := |\alpha|, \text{ Multinomialkoeffizient}),\\
v^\alpha &:= v_1^{\alpha_1} \cdots v_3^{\alpha_3},\\
\partial^\alpha f := D^\alpha f &:= D_3^{\alpha_3} \cdots D_1^{\alpha_1} f.
\end{aligned}$$

(b) Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Wir definieren $m := |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ und das Polynom

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$

Berechnen Sie $T^m_{f,0}$, das Taylorpolynom m-ter Ordnung von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(c) Was ist das Taylorpolynom $T^3_{f,0}$ für die folgende Funktion?

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x_1^2 x_2$$

3.7. (∗) Nichtlineares Gleichungssystem.

(a) Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen $r, r' > 0$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $y \in \mathbb{R}^2$ mit $\|y - (1,1)\| < r'$ existiert eine eindeutige Lösung $x = x_y \in \mathbb{R}^2$ des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + e^{x_2} &= y_1 \\ e^{-x_1} + x_2 &= y_2, \end{aligned}$$

sodass $\|x_y\| < r$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass die Abbildung

$$y \in B^2_{r'}((1,1)) \mapsto x_y \in B^2_r((0,0))$$

glatt ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Abbildung $y \mapsto x_y$ im Punkt $(1,1)$.

In der folgenden Aufgabe führen wir die Kugelkoordinanen, oder räumliche Polarkoordinaten, auf $\mathbb{R}^3$ ein. Dieses Koordinatensystem wird oft in der Physik verwendet, um Systeme mit Rotationssymmetrie zu beschreiben. Sie werden zeigen, dass die Kugelkoordinaten eine glatte bijektive Abbildung mit glatter Umkehrabbildung zwischen geeigneten offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ definieren.

3.8. Kugelkoordinaten.

Wir definieren die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(r, \phi, \theta) := r\Big(\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta\Big).$$

(a) Skizzieren Sie die Bilder unter f der Ebenen $r =$ konstant, $\phi =$ konstant und $\theta =$ konstant, und der Linien $(\phi, \theta) =$ konstant, $(r, \theta) =$ konstant und $(r, \phi) =$ konstant.

(b) Zeigen Sie, dass f surjektiv ist, aber nicht injektiv.

(c) Wir definieren die offene Menge

$$U := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf U injektiv ist.

(d) Bestimmen Sie $V := f(U)$, also das Bild von U unter f.

(e) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : U \to V$ glatt ist mit glatter Umkehrabbildung.

(f) Finden Sie eine explizite Formel für die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$.

3.9. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) Wenn ein Vektorfeld X ein Potential f besitzt, so ist dieses eindeutig.

(ii) Jedes Vektorfeld X besitzt ein zugehöriges Potential in einer Umgebung jedes Punktes.

(iii) Wenn X kein Potential besitzt, so existiert ein geschlossener Weg γ, d.h. mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, sodass $\int X \cdot d\gamma \neq 0$.

(iv) Es seien X_0, X_1 zwei Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $X_1 = X_0 + \nabla f$. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ: $\int X_0 d\gamma = \int X_1 d\gamma$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) Das Gradientenfeld ∇f einer C^1-Funktion f zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f.

(ii) Sei X ein C^1-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Falls $D_1 X^2 = D_2 X^1$, so ist v konservativ. ($D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$)

(c) Sei f eine Funktion auf $\mathbb{R}^2$. Welche der folgenden Aussagen impliziert $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$?

(i) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existieren und sind stetig auf $\mathbb{R}^2$.

(ii) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existieren, sind stetig auf $\mathbb{R}^2$ und stimmen miteinander überein.

(iii) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existieren überall in $\mathbb{R}^2$.

(iv) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existieren und sind stetig in $\mathbb{R}^2$.

(d) Man betrachte die folgende Funktion:

$$f(x, y) := y^2 e^x$$

Man bemerke, dass $(0, 0)$ ein kritischer Punkt ist. Welche Aussage ist hier zutreffend?

(i) Die Hesse-Matrix von f in $(0, 0)$ ist positiv definit.

(ii) Die Hesse-Matrix von f in $(0, 0)$ ist negativ definit.

(iii) Die Hesse-Matrix von f in $(0,0)$ hat positive und negative Eigenwerte.

(iv) Keine der Aussagen ist korrekt.

(e) Man betrachte die folgende Funktion:

$$f(x,y) := (x^2 + y^2)e^{xy}$$

Man bemerke, dass $(0,0)$ ein kritischer Punkt ist. Welche Aussage ist hier zutreffend?

(i) Die Hesse-Matrix von f in $(0,0)$ ist positiv definit.

(ii) Die Hesse-Matrix von f in $(0,0)$ ist negativ definit.

(iii) Die Hesse-Matrix von f in $(0,0)$ hat positive und negative Eigenwerte.

(iv) Keine der Aussagen ist korrekt.