Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (∗) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

4.1. Nichtlineare Gleichung.

(a) Zeigen Sie, dass reelle Zahlen $a > 0$ and $b > 0$ mit der folgenden Eigenschaft existieren: Für alle $x \in (-a, a)$ existiert eine eindeutige Lösung $y = y_x \in (-b, b)$ der Gleichung

$$\sin(x + y) + y = 0.$$

Zeigen Sie weiter, dass die Abbildung $x \in (-a, a) \mapsto y_x \in (-b, b)$ glatt ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Abbildung $x \mapsto y_x$ im Punkt 0.

4.2. Lösung einer polynomialen Gleichung

Wir betrachten

$$f(x, y) := x + x^6 + y + y^5, \quad (x_0, y_0) := (0, 0).$$

(a) Zeigen Sie, dass es offene Intervalle U und V gibt, die x_0 respektive y_0 enthalten, sowie eine glatte Funktion $g : U \to V$, so, dass für jeden Punkt $x \in U$ die Zahl $y = g(x)$ die Gleichung $f(x, y) = 0$ löst und so, dass das die einzige Lösung im Interval V ist.

(b) Berechnen Sie $g'(0)$.

Tipp: Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen.

4.3. Einfache Eigenwerte hängen glatt von den Matrix-Einträgen ab.

Sei $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine $n \times n$ Matrix und sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ein einfacher Eigenwert von A_0. Das heisst ein Eigenwert von algebraischer Vielfachheit 1, also λ_0 ist eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) := \det\big(\lambda \mathbb{1} - A_0\big)$. Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ von A_0 und $V \subseteq \mathbb{R}$ von λ_0 gibt, sodass jedes $A \in U$ einen eindeutigen Eigenwert λ_A in V besitzt, und die Abbildung

$$U \ni A \mapsto \lambda_A \in V$$

glatt ist.

Bemerkung: Hier identifizieren wir den Vektorraum aller reellen $n \times n$ Matrizen mit $\mathbb{R}^{n\times n} = \mathbb{R}^{n^2}$ indem wir die $n \times n$ Einträge der Matrix als Koordinaten verwenden.

4.4. Zweite Ableitung einer impliziten Funktion

(a) Es sei $W \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen und $f : W \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Weiter sei $(x_0, y_0) \in W$, sodass $D_y f(x_0, y_0) \neq 0$. Laut dem Satz von der impliziten Funktion existiert eine Umgebungen U von x_0 und V von y_0 und eine Funktion $g \in C^2(U, V)$, sodass $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$. Finden Sie eine Formel für die zweite Ableitung der impliziten Funktion g in einem beliebigen Punkt $x \in U$.

(b) Berechnen Sie die zweite Ableitung der Funktion $x \mapsto y_x$ aus Aufgabe 4.1 im Punkt $x_0 = 0$.

4.5. Kreis ist eine Untermannigfaltigkeit

Zeigen Sie, dass der Einheitskreis $M := S^1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|x\| = 1 \right\}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ der Dimension 1 ist.

Bemerkungen:

1. Verwenden Sie die Definition einer Untermannigfaltigkeit.
2. In der Vorlesung haben wir schon gezeigt, dass die Sphäre S^{n-1} um gewisse Punkte eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$ ist. Es geht jetzt darum, das im Fall $n = 2$ auch noch für die übrigen Punkte zu zeigen.

4.6. Immersion, Einbettung

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad f(y) := \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine Immersion ist.

(b) Ist f eine Einbettung? Begründen Sie ihre Antwort.

(c) Finden Sie ein nicht leeres offenes Interval I, sodass die Einschränkung von f auf I eine Einbettung ist.

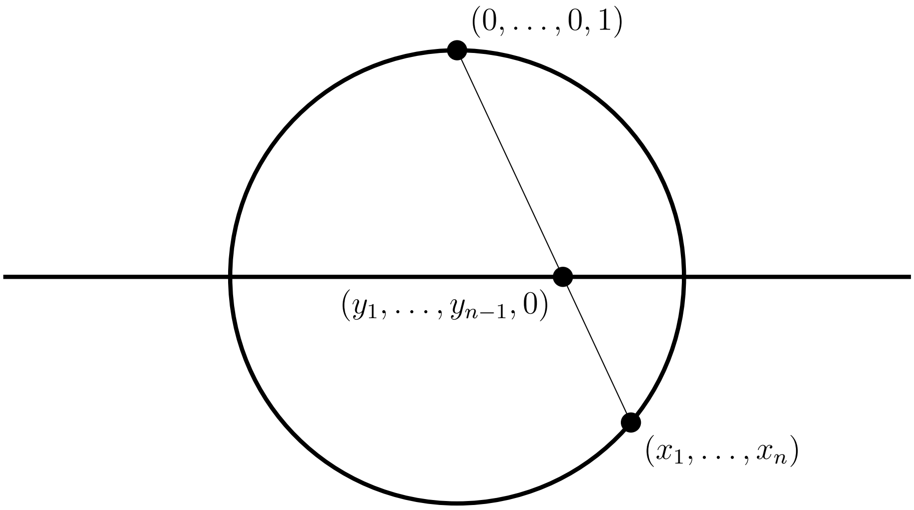

Abbildung 1: Die stereographische Projektion und ihre Inverse.

4.7. Die Inverse stereographische Projektion ist eine Einbettung.

Sei $n \geq 2$. Wir schreiben $S^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x\| = 1 \right\}$ für die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$. Wir definieren die *stereographische Projektion* (*vom Nordpol*) als die Abbildung

$$\varphi : S^{n-1} \setminus \Big\{ \big(0,\dots,0,1\big) \Big\} \to \mathbb{R}^{n-1},$$

die dem Punkt $x = (x_1,\dots,x_n)$ den Punkt $y = (y_1,\dots,y_{n-1})$ wie in Abbildung 1 zuordnet. Der Punkt $(y,0)$ ist der eindeutige Schnittpunkt der Gerade durch $(0,\dots,0,1)$ und x mit der Ebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Wir definieren die *inverse stereographische Projektion* (*vom Nordpol*) als die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^{n-1} \to S^{n-1} \setminus \Big\{ \big(0,\dots,0,1\big) \Big\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

die $y = (y_1,\dots,y_{n-1})$ den Punkt $x = (x_1,\dots,x_n)$ wie in Abbildung 1 zuordnet. Der Punkt x ist der eindeutige Schnittpunkt der Gerade durch $(0,\dots,0,1)$ und $(y,0)$ mit $S^{n-1} \setminus \Big\{ \big(0,\dots,0,1\big) \Big\}$.

(a) Finden Sie eine Formel für φ.

Tipp: Betrachten Sie zuerst den Fall $n = 2$.

(b) (schwierig:) Finden Sie eine Formel für ψ.

(c) Zeigen Sie, dass ψ eine glatte Einbettung ist.

4.8. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Ist die folgende Abbildung lokal invertierbar mit C^1-Inverser in einer Umgebung von $(x, y, z) = (1, 1, 0)$?

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} xy + z \\ x^2(y + z^3)e^z \\ \sin(xz)\cos(yz) \end{pmatrix}$$

(i) Ja

(ii) Nein

(b) Ist die folgende Abbildung lokal invertierbar mit C^1-Inverser in einer Umgebung von $(x, y, z) = (0, 0, 0)$?

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} xy + z \\ x^2(y + z^3)e^z \\ \sin(xz)\cos(yz) \end{pmatrix}$$

(i) Ja

(ii) Nein

(c) Ist die folgende Abbildung $f :]0, \infty[\times \mathbb{R}^2$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild?

$$f(r, \theta, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cosh(\varphi)\cosh(\theta) \\ r\sinh(\varphi)\cosh(\theta) \\ r\sinh(\theta) \end{pmatrix}$$

(i) Ja

(ii) Nein